UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s6journaldemat05liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884
PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, M. LEVY, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME CINQUIÈME. – ANNÉE 1909.
(74e Volume de la Collection.)

10/8210/
18/3/10.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

Tous droits de traduction et de reproduction réservés

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME V.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME V DE LA SIXIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
42794 Quai des Grands-Augustins, 55.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les formes bilinéaires et quadratiques;

Par M. J.-A. de SÉGUIER.

1. M. Jordan a déterminé les formes quadratiques invariantes par une substitution donnée dans le champ des nombres complexes ordinaires ou dans le champ de Galois défini par une équation à coefficients entiers, irréductible mod p, et formé les types réduits distincts auxquels on peut les ramener par des changements de variables qui n'altèrent pas la substitution donnée (*J. M.*, 1888, 1905). M. Dickson s'est ensuite occupé du même problème lorsque le champ est quelconque et l'a complètement résolu pour les champs finis (*Transactions of the Am. Math. Soc.*, 1906, p. 275). M. Lœwy avait auparavant appliqué la même méthode que M. Jordan aux formes hermitiennes, mais sans chercher à les réduire à un type canonique (*N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, 1898).

Ce sont ces recherches que je voudrais poursuivre ici. Je partirai de l'équation

$$\beta a \bar{\alpha} = a \quad (^1),$$

où α, β, a sont trois matrices n-aires invertibles, appartenant à un champ $\mathfrak{C}$, dont on peut assimiler la troisième à une forme bilinéaire $\Sigma a_{ik} x_i y_k$, α à une substitution des x et β à une substitution des y. α et β étant données, il s'agira de construire a (si en particulier $\beta = \bar{\alpha}^{-1}$, $\bar{a}$ est assimilable à une substitution quelconque permutable à α).

J'assujettirai ensuite a aux conditions

$$\bar{a} = \pm a, \qquad \bar{a} = \pm \dot{a}$$

[$\dot{c}$ désignant en général la conjuguée d'une matrice c relativement à un champ C et aux racines υ, $\dot{\upsilon}$ d'une équation quadratique, irréductible dans C, telle que $\mathfrak{C} = C(\upsilon)$ résulte de l'adjonction de υ à C],

$$\bar{a} = \beta a \qquad \text{ou} \qquad \bar{a} = \dot{\beta}\dot{a}.$$

Mais alors je supposerai que α et β peuvent être canonisées par des changements de variables identiques (ou conjugués relativement à C, υ, $\dot{\upsilon}$) et, dans le cas où $\bar{a} = \dot{a}$ et où C n'est pas le champ des nombres réels, que $\beta = \dot{\alpha}$: ces restrictions se trouvent suggérées par la nature même de la question. Le cas $\bar{a} = \beta a$ conduira notamment à l'extension d'un théorème de Kronecker et à celle des résultats obtenus par M. Voss sur les solutions de l'équation $\bar{a} = \alpha a$.

Lorsque $\mathfrak{C}$ a le module 2, la recherche des formes quadratiques invariantes par une substitution donnée échappe à l'analyse précédente. Mais, en substituant à la forme quadratique une forme bilinéaire convenable, on peut encore employer une analyse analogue. C'est ce que j'indiquerai pour terminer, principalement dans le but d'arriver à une démonstration nouvelle du théorème de M. Jordan sur les substitutions

---

(1) La terminologie et les notations employées seront les mêmes que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Gauthier-Villars, 1904), auxquels je renverrai par la lettre E.

paires qui conservent une forme quadratique donnée (*J. M.*, 1905, p. 278).

Malgré certaines différences qu'il serait trop compliqué d'indiquer ici, la méthode employée ne pouvait évidemment pas être autre dans le fond que celle de M. Jordan. J'ai cru utile néanmoins de reproduire certains résultats déjà obtenus qui se présentaient conjointement avec d'autres.

2. L'équation $\beta a \bar{\alpha} = a$ équivaut à

$$a(\bar{\alpha} - s\varepsilon) = (\beta^{-1} - s\varepsilon)a$$

($\varepsilon = \varepsilon_n$, ε_N étant la matrice unité d'ordre N). *Pour qu'il existe une forme a telle que*

$$\beta a \bar{\alpha} = a \quad \text{et} \quad |a| \neq 0,$$

il faut donc et il suffit (*E.*, 201) *que* $\beta^{-1} - s\varepsilon$ *ait les mêmes diviseurs élémentaires que* $\bar{\alpha} - s\varepsilon$, *c'est-à-dire que* $\alpha - s\varepsilon$. *Les multiplicateurs de* β *sont donc les inverses de ceux de* α.

Si $\beta a \bar{\alpha} = a$ *et si le rang* $r (> 0)$ *de a est* $\leqq n$, $|\alpha - s\varepsilon|$ *et* $|\beta^{-1} - s\varepsilon|$ *ont un facteur commun de degré r, c'est-à-dire que r racines, distinctes ou non, de* $|\beta - s\varepsilon|$ *sont les inverses de r racines de* $|\alpha - s\varepsilon|$. Car on sait trouver dans $\mathfrak{S}$ deux matrices x et y telles que

$$xay = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si donc on pose

$$xay = b, \qquad y^{-1}(\bar{\alpha} - s\varepsilon)y = c, \qquad x(\beta^{-1} - s\varepsilon)x^{-1} = d$$

et

$$c = \begin{pmatrix} c_{rr} & c_{rs} \\ c_{sr} & c_{ss} \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} d_{rr} & d_{rs} \\ d_{sr} & d_{ss} \end{pmatrix},$$

$c_{\rho\sigma}$ et $d_{\rho\sigma}$ désignant des matrices de type $\mathfrak{F}(\rho, \sigma)$ $(r + s = n)$, on aura

$$bc = db$$

ou

$$\begin{pmatrix} d_{rr} & 0 \\ d_{sr} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{rr} & c_{rs} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$d_{sr} = c_{rs} = 0, \qquad d_{rr} = c_{rr}.$$

Si α et β sont des sommes de substitutions composantes parmi lesquelles α' agissant sur $x_1, \ldots, x_p$ et β' sur $y_1, \ldots, y_q$, il est clair que

$$a' = \Sigma a_{ik} x_i y_k \qquad (i = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, q)$$

est égale à $\beta' a' \bar{\alpha}'$. *Si donc aucun multiplicateur de β' n'est l'inverse d'un multiplicateur de α', a' est nulle.*

5. *Supposons maintenant d'abord que $\mathfrak{S}$ soit le champ des nombres complexes ordinaires.*

Prenons α sous forme canonique, et faisons sur les y un changement de variables canonisant β (si $\xi\beta\xi^{-1} = \beta'$ et si $\xi a = a'$, l'équation $\beta a \bar{\alpha} = a$ équivaut à $\beta' a' \bar{\alpha} = a'$, et, si ξ est donnée, la connaissance de a' équivaut à celle de a). Soient $s_1, \ldots$ les multiplicateurs de α, $t_1, \ldots$ ceux de β. D'après ce qu'on vient de voir, a est une somme de formes dans chacune desquelles figurent les seules variables x relatives à un multiplicateur s_i de α et les seules variables y relatives à un multiplicateur t_k de β tel que

$$t_k = s_i^{-1}.$$

Soit

$$t_1 = s_2^{-1}, \qquad t_2 = s_3^{-1}, \qquad \ldots, \qquad t_\chi = s_1^{-1},$$

χ étant minimum (par hypothèse, α admet tous ces multiplicateurs si elle en admet un, et l'on peut toujours ranger les variables de manière à vérifier ces relations, même s'il y a une correspondance entre les variables des deux séries). Il suffit de considérer le cas où α agit sur les seules variables canoniques relatives à

$$s_1 (= s), \qquad \ldots, \qquad s_\chi$$

et β sur les seules variables canoniques relatives à

$$t_1 (= t), \qquad \ldots, \qquad t_\chi.$$

Soit m_j le nombre des variables de la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_1, et supposons d'abord les variables rangées de manière que

$$m_j = m_{j+1}$$

et

$$m_1 = \ldots = m_{q_1} > m_{q_1+1} = \ldots = m_{q_1+q_2} > \ldots = m_{q_1+\ldots+q_n}$$

(j'écrirai m pour m_1, q pour q_1, Q_h pour $\Sigma_1^h q_i$). Les q premières suites seront dites former la *première sous-série*, les q_2 suivantes la *deuxième sous-série*, et ainsi de suite. On sait que les substitutions qui agissent de la même manière sur les variables de même rang des diverses suites d'une même sous-série sont permutables à α : elles forment évidemment un groupe que j'appellerai *groupe des sous-séries*.

D'après les hypothèses, à la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_1 répond une suite également nombreuse (que je supposerai être la $j^{\text{ième}}$) relative à $s_i (i = 1, \ldots, \varkappa)$ et une suite également nombreuse (que je supposerai être la $j^{\text{ième}}$) de variables de β relative à t_i. Après la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_1 je placerai maintenant la $j^{\text{ième}}$ relative à s_2, puis la $j^{\text{ième}}$ relative à s_3, ..., puis la $j^{\text{ième}}$ relative à $s_\varkappa$, puis la $(j+1)^{\text{ième}}$ relative à s_1, ..., et je désignerai par x_k^i la $k^{\text{ième}}$ variable de la $i^{\text{ème}}$ des suites ainsi placées et par σ_i le multiplicateur relatif à x_k^i. De même, après la $j^{\text{ième}}$ suite relative à $t_1 (= s_2^{-1})$, je placerai la $j^{\text{ième}}$ relative à $t_2 (= s_3^{-1})$, ..., puis la $j^{\text{ième}}$ relative à $t_\varkappa (= s_1^{-1})$, puis la $(j+1)^{\text{ième}}$ relative à t_1, ..., et je désignerai par y_k^i la $k^{\text{ième}}$ variable de la $i^{\text{ème}}$ des suites ainsi placées et par τ_i le multiplicateur relatif à y_k^i.

Soient alors

$$a = \Sigma_{ijkl} a_{kl}^{ij} x_k^i y_l^j$$

la forme considérée (je supposerai les lignes de la matrice a rangées dans l'ordre des x_k^i et les colonnes dans l'ordre des y_k^i); A^{ij} la partie de a où, i et j restant fixes,

$$k = 1, \ldots, m_i, \qquad l = 1, \ldots, m_j$$

(k indiquant la ligne et l la colonne); $\bar{A}^{gh}$ la matrice des A^{ij} où

$$i = (g-1)\varkappa + 1, \ldots, g\varkappa, \qquad j = (h-1)\varkappa + 1, \ldots, h\varkappa$$

(i indiquant la ligne et j la colonne); $\mathcal{A}_{\rho\sigma}$ la matrice des $\bar{A}^{gh}$ où

$$g = Q_{\rho-1} + 1, \ldots, Q_\rho, \qquad h = Q_{\sigma-1} + 1, \ldots, Q_\sigma$$

(g indiquant la ligne et h la colonne); $a^{\lambda\mu}$ la matrice des matrices

$A^{(i-1)\varkappa+\lambda,\,(j-1)\varkappa+\mu}$ où

$$i, j = 1, \ldots, Q_\omega$$

(i indiquant la ligne et j la colonne) (¹). A^{ij}, devant être transformée en elle-même quand on applique α aux x et β aux y, est évidemment nulle si $\sigma_i \tau_j \neq 1$. Donc *les seules* $A^{ij} \neq 0$ *sont celles où*

$$i \equiv j+1 \qquad \operatorname{mod} \varkappa \qquad (i, j = 1, \ldots, Q_\omega \varkappa).$$

Soit donc

$$i \equiv j+1 \qquad \operatorname{mod} \varkappa.$$

Alors $a_{kl}^{ij} x_k^i y_l^j$ est remplacé par

$$a_{kl}^{ij}(x_k^i + x_{k-1}^i)(y_l^j + y_{l-1}^j) \qquad (x_0^i = y_0^j = 0),$$

et, pour que le coefficient de $x_k^i y_l^j$ dans $\beta a \bar{\alpha}$ soit encore a_{kl}^{ij}, il faut et suffit que l'on ait, en regardant a_{kl}^{ij} comme nul pour $k > m_i$ ou $l > m_j$,

$$(1) \qquad a_{kl}^{ij} + a_{k,l-1}^{ij} + a_{k-1,l}^{ij} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, m_i + 1;\ l = 2, \ldots, m_j + 1).$$

Cette équation donne en particulier

$$a_{km_j}^{ij} = 0 \qquad \text{pour} \qquad k \geqq 2,$$
$$a_{m_i l}^{ij} = 0 \qquad \text{pour} \qquad l \geqq 2,$$

et montre de proche en proche que *tout élément de* A^{ij} *situé* au-dessous de la transversale principale de A^{ij} [j'appellerai *transversale* d'une matrice $\xi = (\xi_{ik})$ de type (ρ, σ) toute file d'éléments perpendiculaire à la diagonale principale, $k^{\text{ième}}$ *transversale* celle qui contient ξ_{1k} et *transversale principale* la $\rho^{\text{ième}}$ si $\rho \leqq \sigma$, la $\sigma^{\text{ième}}$ si $\rho \geqq \sigma$; le $k^{\text{ième}}$ élément d'une transversale sera celui appartenant à la $k^{\text{ième}}$ ligne] *est nul :* on le voit clairement *sur la figure*. Quand on se donne un élément de chacune des m_j transversales passant par $a_{11}^{ij}, \ldots, a_{1m_j}^{ij}$, par exemple les a_{1l}^{ij}, on voit encore de suite sur la figure que (1) détermine complètement les a_{kl}^{ij}. En particulier, *si* $a_{1r}^{ij} \neq 0$, a_{1l}^{ij} *étant nul pour* $l > r$ (*ou* r *étant égal à* m_j), *tout élément situé au-dessous de la transversale*

(¹) Pour la seule analyse des nᵒˢ 2-6, il serait plus simple de déterminer séparément $a^{1\varkappa}$ par exemple.

passant par a_{1r}^{ij} (que j'appellerai alors *transversale caractéristique de rang* r) *est nul, ceux de cette transversale étant égaux alternativement à* a_{1r}^{ij} *et à* $-a_{1r}^{ij}$, *en sorte que le rang de* A^{ij} *est* r.

On remarquera que, si $A^{ij}(a_{1\lambda}^{ij})$ est la détermination de A^{ij} quand on fait nuls tous les a_{1l}^{ij} où $l \neq \lambda$,

$$A^{ij} = \Sigma_\lambda A^{ij}(a_{1\lambda}^{ij}),$$

car les m_j égalités analogues à (1) relatives aux m_j matrices $A^{ij}(a_{1\lambda}^{ij})$ ont évidemment pour somme l'égalité correspondante relative à A^{ij}.

4. Achevons maintenant d'introduire la condition $|a| \neq 0$. Soient $A_{\rho\sigma}^{kl}$ la matrice des a_{kl}^{ij} où k et l restent fixes ($k = m_{Q_\rho}$, $l = m_{Q_\sigma}$) tandis que i parcourt les nombres

$$\varkappa Q_{\rho-1}+1, \quad \ldots, \quad \varkappa Q_\rho,$$

et j les nombres

$$\varkappa Q_{\sigma-1}+1, \quad \ldots, \quad \varkappa Q_\sigma;$$

$A_{\rho\sigma,tu}^{kl}$ la matrice qui se déduit de $A_{\rho\sigma}^{kl}$ quand i parcourt seulement les nombres

$$\varkappa Q_{\rho-1}+t, \quad \varkappa Q_{\rho-1}+t+\varkappa, \quad \ldots, \quad \varkappa Q_{\rho-1}+t+(q_\rho-1)\varkappa$$

et j les nombres

$$\varkappa Q_{\sigma-1}+u, \quad \varkappa Q_{\sigma-1}+u+\varkappa, \quad \ldots, \quad \varkappa Q_{\sigma-1}+u+(q_\sigma-1)\varkappa$$

(i indiquant la ligne et j la colonne); $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$ la matrice des $A_{\rho\sigma,tu}^{kl}$ où t, $u = 1, \ldots, \varkappa$ (t indiquant la ligne et u la colonne; il est clair que $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$ se déduit de $A_{\rho\sigma}^{kl}$ par une permutation de lignes et de colonnes); $\mathcal{A}'_{\rho\sigma}$ la matrice des $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$ où

$$k = Q_{\rho-1}+1, \ldots, Q_\rho, \qquad l = Q_{\sigma-1}+1, \ldots, Q_\sigma$$

[k indiquant la ligne et l la colonne; les $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$ situées au-dessous de la transversale principale de $\mathcal{A}'_{\rho\sigma}$ sont nulles, et, dans chacune des autres, les seules $A_{\rho\sigma,tu}^{kl} \neq 0$ sont celles où (t, u) est l'un des couples $(1, \varkappa)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $\ldots$, $(\varkappa, \varkappa-1)$]. Par une permutation des lignes et des colonnes on peut faire en sorte que chaque $\mathcal{A}_{\rho\sigma}$ soit remplacé par $\mathcal{A}'_{\rho\sigma}$ ([1]). Or les matrices

$$\grave{A}_{11}^{1m},\quad \grave{A}_{11}^{2,m-1},\quad \hat{A}^{3,m-2},\quad \dots$$

qui forment la transversale principale de $\mathcal{A}'_{11}$ sont égales à $\pm\grave{A}_{11}^{1m}$; et les $\grave{A}_{11}^{hl}$ situées, dans $\mathcal{A}'_{11}$, au-dessous de celles-là sont nulles. Donc

$$|\mathcal{A}'_{11}| = \pm |A_{11}^{1m}|^m,$$

et de même

$$|\mathcal{A}'_{\rho\rho}| = \pm |A_{\rho\rho}^{1m_{\varrho\varrho}}|^{m_{\varrho\varrho}}.$$

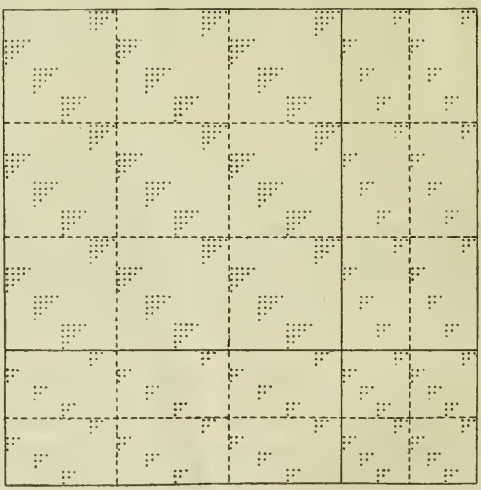
Je vais montrer que

$$|a| = \Pi_1^{\omega} |\mathcal{A}'_{\rho\rho}|.$$

Pour cela remarquons d'abord que, *si* $|a|$ *est* $\neq 0$, *une au moins des* A^{ij}

([1]) Les deux figures suivantes, où les points indiquent des éléments de a (les

Fig. 1.



éléments non indiqués étant nuls), représentent la matrice a avant et après cette *de chaque ligne (colonne) de $\mathcal{A}_{11}$ considérée comme matrice des Λ^{ij} est de rang m*, sans quoi, la transversale principale d'un Λ^{ij} de rang $< m$ étant formée d'éléments nuls, a aurait une ligne (colonne) nulle. Soit, par exemple, $\Lambda^{1\alpha}$ de rang m. Si Λ^{1i} (i pouvant être $> q\alpha$) est de rang k et si $\omega_{ff}^{hi} = \omega$ est la substitution qui remplace

$$y_k^h \quad \text{par} \quad y_k^h + \lambda y_{k-f}^i \quad (k = f+1, \ldots, m;\ f = 1 \text{ si } i = h)$$

sans altérer les autres variables, on pourra déterminer λ de manière qu'en prenant

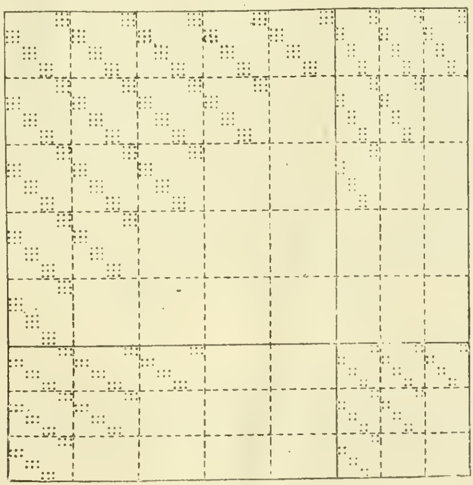
$$\omega a = a' \qquad \text{pour} \qquad a \qquad (|a'| = |a|)$$

le rang de Λ^{1i} soit $< k$ [la matrice ωa se déduit de a par addition des

---

permutation. On a supposé $m_1 = 5$, $q_1 = 3$, $m_2 = 3$, $q_2 = 2$, $\omega = 2$, $\alpha = 4$. Les

Fig. 2.



traits pleins séparent, dans la figure 1, les $\mathcal{A}_{\rho\sigma}$ et, dans la figure 2, les $\mathcal{A}_{\rho\sigma}$; les traits pointillés séparent, dans la figure 1, les $\bar{\Lambda}_{gh}$ et, dans la figure 2, les $\bar{\Lambda}_{\rho\sigma}^{kl}$.

colonnes de rangs

$$mh+m,\quad mh+m-1,\quad \ldots,\quad mh+f+1$$

multipliées par λ, à celles de rangs,

$$mi+m-f,\quad mi+m-f-1,\quad \ldots,\quad mi+1$$

respectivement; je dirai que cette série d'additions est une *addition de multiplicateur* λ

de la $(mh+m)^{\text{ième}}$ *transversale de* a *à la* $(mi+m-f)^{\text{ième}}$,

et que le groupe *engendré* par les substitutions de la forme $\varpi_{\lambda f}^{hi}$ est le *groupe des additions* relatif à β; $a\varpi$ se déduit de a par des additions symétriques de lignes constituant l'*addition symétrique de transversales*]. D'ailleurs, ϖ *étant permutable à* α *et à* β, *on a*

$$\beta a' \bar{\alpha} = a'.$$

Donc a' a les mêmes propriétés que a, et l'on pourra, en répétant l'opération et en faisant, au besoin, des permutations de lignes et de colonnes, ramener d'abord $\mathcal{A}_{11}$, considérée comme matrice de Λ^{gh}, à ne contenir qu'une $\Lambda^{gh} \neq 0$ par ligne et par colonne, puis les $\mathcal{A}_{i1}$ et les $\mathcal{A}_{1i}$ où $i>1$ à zéro. Ces opérations n'ont pas altéré $|\mathcal{A}_{11}|$. En opérant de même sur les $\mathcal{A}_{2i}$ et les $\mathcal{A}_{i2}$, etc., on ramènera a à la matrice diagonale des $\mathcal{A}_{\rho\rho}$.

Pour que $|a|$ *soit* $\neq 0$, *il faut donc et il suffit que chaque* $|\Lambda_{\rho\rho}^{1 m_{Q_\rho}}|$ *soit* $\neq 0$, *c'est-à-dire que*

$$|\Lambda_{\rho\rho,1\varkappa}^{1 m_{Q_\rho}}|,\quad |\Lambda_{\rho\rho,21}^{1 m_{Q_\rho}}|,\quad \ldots,\quad |\Lambda_{\rho\rho,\varkappa,\varkappa-1}^{1 m_{Q_\rho}}|,$$

dont il est le produit, soient $\neq 0$.

5. Le nombre d'arbitraires entrant dans a se détermine aisément. On prendra d'abord, pour chaque valeur de ρ, les q_ρ^2 éléments de $\Lambda_{\rho\rho}^{1 m_{Q_\rho}}$ de manière que $|\Lambda_{\rho\rho}^{1 m_{Q_\rho}}|$ soit $\neq 0$. Soit

$$N(Q_1, m_{Q_1};\ Q_2, m_{Q_2};\ \ldots)$$

le nombre des autres éléments de a. Il y a, dans $\mathcal{A}_{11}$, $\varkappa q^2$ matrices Λ^{ij}

dans chacune desquelles il reste $m-1$ éléments arbitraires. Dans chaque $A^{ij} \neq 0$ où l'un des indices est αq et l'autre $> \alpha Q_{h-1}$ et $\leq \alpha Q_h$, il y a m_{Q_h} arbitraires. Donc

$$(2)\quad N(Q_1, m_{Q_1}; \ldots) = \alpha q_1^2(m_1-1) + 2\alpha q_1(m_2 q_2 + m_3 q_3 + \ldots) + N(Q_2, m_{Q_2}; \ldots).$$

6. *On peut par des changements de variables conservant la forme canonique de α et de β ramener a à une forme simple complètement déterminée.* — En répétant, au besoin, l'opération qui consiste à remplacer a par $\varpi_{k,l}^{hi} a$ [1], on ramène d'abord comme tout à l'heure les $A_{\rho\rho}$ (considérées comme matrices de λ^{gh}) à ne contenir qu'une λ^{gh} par ligne et par colonne, puis les $A_{\rho\sigma}$ où $\rho \neq \sigma$ à o. En remplaçant alors a par ξa, ξ étant une substitution du groupe des sous-séries relatif aux y_k^i, on ramène chaque $A_{\rho\rho}$, considérée comme matrice des λ^{gh}, à la forme diagonale et le premier élément de la transversale principale de chaque $A^{ij} \neq 0$ à 1. En remplaçant enfin a par $\varpi_{k,f}^{\alpha\alpha} a$, on pourra donner à $a_{1, m-f}^{1\alpha}$ une valeur arbitraire. Supposons, par exemple, que $a_{11}^{1\alpha} = 0$ et que $a_{12}^{1\alpha}, \ldots, a_{1m}^{1\alpha}$ sont les coefficients de $(-1)^{m-1}(1+x)^{m-2}$ ordonné suivant les puissances croissantes de x. Alors, d'après (1), $a_{k1}^{1\alpha}$ est nul pour $k < m$ ($a_{1m}^{1\alpha} = 1$), et $a_{k2}^{1\alpha}, \ldots, a_{k, m-k+1}^{1\alpha}$ sont les coefficients de $(-1)^{m-k}(1+x)^{m-k-1}$ ordonné suivant les puissances croissantes de x.

On opérera de même pour réduire à cette forme, que j'appellerai *forme bilinéaire type* ou *du premier type*, les autres $A^{ij} \neq 0$. En supposant que $a_{11}^{1\alpha}, \ldots, a_{1m}^{1\alpha}$ sont les coefficients de $(-1-x)^{m-1}$ ordonné suivant les puissances croissantes de x, $a_{k1}^{1\alpha}, \ldots, a_{k, m-k+1}^{1\alpha}$ seraient ceux de $(-1-x)^{m-k}$ ordonné de même; j'appellerai cette forme *bilinéaire du second type* [2].

---

[1] Lorsqu'on fera plus loin des réductions analogues en s'astreignant à traiter, dans les changements de variables, les x et les y comme cogrédients ou conjugués, il faudra supposer qu'on remplace ici a par $\varpi_{k,l}^{hi} a \overline{\varpi}_{k,l}^{hi}$ ou par $\varpi_{k,l}^{hi} a \dot{\varpi}_{k,l}^{hi}$. La même remarque est à faire au sujet du remplacement de a par ξa ou par $\varpi_{k,f}^{\alpha\alpha}$ dans un instant.

[2] On remarquera que les transformations de lignes et de colonnes qui conduisent à la forme réduite obtenue s'opèrent en réalité sur chacune des ma-

7. a n'étant pas entièrement déterminée par $\beta a \bar{\alpha} = a$ et $|a| = 0$, on peut lui imposer d'autres conditions. *Adjoignons, par exemple, la condition $\bar{a} = \pm a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$* (on peut omettre le cas $\bar{a} = -\dot{a}$ qui se ramène au cas $\bar{a} = \dot{a}$ en posant $a = ia'$). Tout en ne regardant pas β comme nécessairement égal à α ou à $\dot{\alpha}$, je traiterai les x et les y, *dans les changements de variables,* comme cogrédients si $\bar{a} = \pm a$, comme conjugués si $\bar{a} = \dot{a}$, de manière à conserver ces propriétés. Je *supposerai* donc qu'on peut canoniser simultanément α et β par de tels changements de variables. La correspondance établie entre x_i et y_i par la condition $\bar{a} = \pm a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$ quand on assimile a à $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ se traduit par la correspondance entre les variables canoniques x^i_k, y^i_k (l'ordre étant celui du n° **5**). Il est clair que $t_i = s_i$ si $\beta = \alpha$, et que $t_i = \dot{s}_i$ si $\beta = \dot{\alpha}$. On a ici

$$(3)\quad a^{ji}_{lk} = a^{ij}_{kl} \text{ si } \bar{a} = a; \qquad a^{ji}_{lk} = -a^{ij}_{kl} \text{ si } \bar{a} = -a; \qquad a^{ji}_{lk} = \dot{a}^{ij}_{kl} \text{ si } \bar{a} = \dot{a}.$$

Ces relations exigent, on le voit sur la figure, que $\varkappa$ soit ≤ 2. Si $j \neq i$, elles déterminent les a^{ji}_{lk} situés au-dessous de la diagonale de a par ceux qui sont au-dessus. *Si $j = i$ et si $A^{ii} \neq 0$ (alors $\varkappa = 1$ et $t_1 = s_1^{1}$), elles exigent que le rang r de A^{ii} soit impair pour $\bar{a} = a$, pair pour $\bar{a} = -a$. Si $\bar{a} = a$, r étant impair,* on a, d'après (1),

$$a^{ii}_{k-1,k} = a^{ii}_{k,k-1} = -\tfrac{1}{2} a^{ii}_{kk} \qquad (k \geq 2).$$

On peut donc prendre, dans A^{ii}, pour seules indéterminées $a^{ii}_{11}, \ldots, a^{ii}_{\mu\mu}$, $2\mu - 1$ étant le plus grand nombre impair $\leq m_i$ $\left[\mu = \mathrm{E}\left(\frac{m_i + 1}{2}\right)\right.$, $\mathrm{E}(x)$ désignant le plus grand entier $\left.\leq x\right]$. *Si $\bar{a} = -a$, r étant pair,* on a $a^{ii}_{kk} = 0$: on peut donc prendre, dans A^{ii}, pour seules indéterminées

$$a^{ii}_{12}, \quad a^{ii}_{23}, \quad \ldots, \quad a^{ii}_{\mu,\mu+1}.$$

---

trices $a^{1\varkappa}$, a^{21}, a^{32}, $\ldots$, $a^{\varkappa,\varkappa-1}$ (3) prises séparément. Pour la réduction précédente, *cf.* Jordan, *J. M.*, 1905, p. 231-238; Dickson, *Transact. of the Am. Math. Soc.*, 1906, p. 283-284.

2μ étant le plus grand nombre pair $\leqq m_i \left[\mu = \mathrm{E}\left(\frac{m_i}{2}\right)\right]$. *Si* $\bar{a} = a$, le rang r de A^{ii} peut être pair ou impair; mais la transversale caractéristique se compose d'éléments réels pour r impair, d'éléments purement imaginaires pour r pair. De plus (3) exige que les a_{kk}^{ii} soient réels, en sorte que, d'après (1), la partie réelle des $a_{k,k-1}^{ii}$ ($k \geqq 2$) est déterminée par les a_{kk}^{ii}. On peut donc prendre, dans A^{ii}, pour indéterminées, si m_i est pair $= 2\mu$, les nombres réels

$$a_{11}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu\mu}^{ii}$$

et les parties imaginaires de

$$a_{12}^{ii}, \quad a_{23}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu,\mu+1}^{ii},$$

si m_i est impair $= 2\mu - 1$, les nombres réels

$$a_{11}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu\mu}^{ii}$$

et les parties imaginaires de

$$a_{12}^{ii}, \quad a_{23}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu-1,\mu}^{ii}.$$

8. Au lieu de la condition $\bar{a} = \pm a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$, *adjoignons la condition* $\bar{a} = \beta a$ *ou* $\bar{a} = \dot{\beta}\dot{a}$ (en traitant, dans les changements de variables, les x et les y comme cogrédients si $\bar{a} = \beta a$, comme conjugués si $\bar{a} = \dot{\beta}\dot{a}$, de manière à laisser inaltérée la forme de cette condition), x_k^i *et* y_k^i *étant toujours les variables correspondantes.* On aura

$$(4) \quad a_{lk}^{ji} = \tau_j(a_{kl}^{ij} + a_{k,l+1}^{ij}) \quad \text{si} \quad \bar{a} = \beta a, \qquad a_{lk}^{ji} = \dot{\tau}_j(\dot{a}_{kl}^{ij} + \dot{a}_{k,l+1}^{ij}) \quad \text{si} \quad \bar{a} = \dot{\beta}\dot{a}.$$

En remplaçant donc, si $\bar{a} = \beta a$, a_{kl}^{ij} par

$$\tau_i(a_{lk}^{ji} + a_{l,k+1}^{ji})$$

et $a_{k,l+1}^{ij}$ par

$$\tau_i(a_{l+1,k}^{ji} + a_{l+1,k+1}^{ji}),$$

on obtient, d'après (1), les A^{ij} n'étant pas tous nuls,

$$\tau_i\tau_j = 1;$$

or

$$\sigma_i \tau_j = 1\,;$$

donc, $|\alpha\beta|$ étant $\neq 0$, $\sigma_i = \tau_i$ ou

$$\beta = \alpha$$

(on remarquera que $\alpha a \bar{\alpha} = a$ résulte de $\bar{a} = \alpha a$ par l'élimination de $\bar{a}$ entre $\bar{a} = \alpha a$ et sa transposée). Si $a = \dot{\beta}\dot{a}$, on obtient de même

$$\beta = \dot{\alpha}$$

($\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a$ *résulte encore de* $\bar{a} = \alpha\dot{a}$). Dans ces deux cas $\varkappa$ est $\leqq 2$. *Si* $i \neq j$, (4) détermine les a_{lk}^{ji} situés au-dessous de la diagonale quand on connaît les autres.

Soit $i = j$ (*donc* $\varkappa = 1$). Si $\bar{a} = \alpha a$, on a

$$s = \pm 1,$$

et le rang r de A^{ii} *est impair ou nul pour* $s = 1$ [(4) donne, pour $k = l$, $a_{k,k+1}^{ii} = 0$; or, pour $r = 2\rho$, $a_{\rho,\rho+1}^{ii}$ est sur la transversale caractéristique], *pair pour* $s = -1$ [(4) donne, pour $k = l$,

$$2a_{kk}^{ii} = -a_{k,k+1}^{ii},$$

d'où, pour $r = 2\rho - 1$,

$$a_{\rho\rho}^{ii} = 0;$$

or, $a_{\rho\rho}^{ii}$ est alors sur la transversale caractéristique]. On peut donc prendre, dans A^{ii}, pour seules indéterminées, si $s = 1$ ($a_{k-1,k}^{ii} = 0$),

$$a_{11}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu\mu}^{ii},$$

$2\mu - 1$ étant le plus grand nombre impair $\leqq m_i \left[\mu = \mathrm{E}\left(\dfrac{m_i + 1}{2}\right)\right]$, si $s = -1$ ($2a_{kk}^{ii} = -a_{k,k+1}^{ii}$),

$$a_{11}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu\mu}^{ii} \qquad (\text{ou } a_{12}^{ii}, a_{23}^{ii}, \ \ldots, \ a_{\mu,\mu+1}^{ii}),$$

2μ étant le plus grand nombre pair $\leqq m_i \left[\mu = \mathrm{E}\left(\dfrac{m_i}{2}\right)\right]$.

Si $\bar{a} = \alpha\dot{a}$, on a

$$s\dot{s} = 1,$$

et la condition

$$a^{ii}_{1r} = (-1)^{r-1} s \dot{a}^{ii}_{1r},$$

qui résulte de (4) (pour $\beta = \alpha$, $k = r$, $l = 1$) et de (1), détermine le rapport des parties réelle et imaginaire de chaque élément de la transversale caractéristique. De plus (4), pour $l = k$, détermine $\dot{a}^{ii}_{k,k+1}$ par a^{ii}_{kk}. Or, si r est pair $= 2\rho$, $a^{ii}_{\rho,\rho+1} = u$ est sur la transversale caractéristique, et l'on a, en posant $a^{ii}_{\rho\rho} = v$,

$$u = -s\dot{u}, \qquad v = s(\dot{v} + \dot{u}).$$

Mais ces équations donnent seulement une relation linéaire entre les parties réelle et imaginaire de u et une autre entre celles de v. Donc r peut être pair ou impair, et l'on peut prendre dans A^{ii} pour seules indéterminées, si m_i est pair $= 2\mu$, $a^{ii}_{11}, \ldots, a^{ii}_{\mu-1,\mu-1}$ et une des parties (réelle ou imaginaire) de $a^{ii}_{\mu\mu}$ et de $a^{ii}_{\mu,\mu+1}$, si m_i est impair $= 2\mu - 1$, $a^{ii}_{11}, \ldots, a^{ii}_{\mu-1,\mu-1}$ et une des parties (réelle ou imaginaire) de $a_{\mu\mu}$.

9. *Pour que* $|a|$ *soit* $\neq 0$, *il faut que* q_ρ *soit pair dans les quatre cas suivants :*

m_{Q_ρ} *pair avec*	$\bar{a} = a$	et	$st = 1$;
m_{Q_ρ} *impair avec*	$\bar{a} = -a$	et	$st = 1$;
m_{Q_ρ} *pair avec*	$\bar{a} = \beta a (= \alpha a)$	et	$s = 1$;
m_{Q_ρ} *impair avec*	$\bar{a} = \beta a (= \alpha a)$	et	$s = -1$.

Car, dans ces quatre cas, $|A^{1m_{Q_\rho}}_{\rho\rho}|$ est gauche d'ordre q_ρ (ici $\varkappa = 1$). *La condition est d'ailleurs suffisante*, car, si elle est remplie, on pourra toujours choisir les éléments de $A^{1m_{Q_\rho}}_{\rho\rho}$ de manière que $|A^{1m_{Q_\rho}}_{\rho\rho}|$ soit $\neq 0$ [1].

Si $\beta = \alpha$, *l'équation caractéristique de* α *est réciproque, et l'équation* $\alpha\, a\, \bar{\alpha} = a$ *donne*

$$|\alpha| = \pm 1.$$

---

[1] *Comparer*, pour les deux premiers cas, avec $\beta = \alpha$, FROBENIUS, *Cr.*, t. 84, p. 41 (1878), et, pour le cas $\bar{a} = \alpha a$, KRONECKER, *Mo. A. B.*, 1874, p. 441 (*Werke*, t. I, p. 476).

Si $\bar{a} = \alpha a$, *il est clair que* $|\alpha| = 1$. *Si* $\bar{a} = -a$, *on a encore*

$$|\alpha| = 1,$$

sans quoi α aurait le multiplicateur -1, et un au moins des produits $m_h q_h$ relatifs à $s = -1$ devrait être impair contrairement au théorème précédent. *Si* $\bar{a} = a$, $|\alpha|$ *peut être égal à* -1; *mais si* $|\alpha| = 1$ *avec* $s = -1$, Q_ω *est* > 1 [1]. *Si* $\bar{a} = \alpha \dot{a}$, $|\alpha\alpha| = 1$.

10. On remarquera enfin cette conséquence de la nullité des a_{kl}^{ii} situés au-dessous de la transversale principale de A^{ii} : *si a est hermitienne définie avec* $\beta = \alpha$, α *a une forme canonique monome et des multiplicateurs de module* 1 [2], sans quoi certains coefficients diagonaux seraient nuls.

On en déduit immédiatement des conséquences connues analogues, relatives aux formes quadratiques définies.

La détermination d'une forme bilinéaire à variables conjuguées a telle que $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a$ *se ramène de suite au cas où a est hermitienne*, car, a étant de la forme $a' + ia''$ où a' et a'' sont hermitiennes, on a

$$\dot{\alpha} a' \bar{\alpha} = a', \qquad \dot{\alpha} a'' \bar{\alpha} = a''.$$

Si a est définie, α a encore une forme canonique monome et des multiplicateurs de module 1. Je laisserai désormais de côté les formes bilinéaires à variables conjuguées non hermitiennes.

11. Calculons le nombre d'arbitraires entrant dans a. Nous prendrons d'abord, pour chaque valeur de ρ, les q_ρ^2 éléments de $A_{\rho\rho}^{1 m_{Q_\rho}}$ de manière que $|A_{\rho\rho}^{1 m_{Q_\rho}}|$ soit $\neq 0$ (les $a_{1 m_{Q_\rho}}^{ii}$ satisfaisant aux conditions indiquées plus haut). Soit

$$N(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots)$$

le nombre des éléments arbitraires restants de a. *Si* $st \neq 1$, il y a, dans $\mathcal{A}_{11}$, $2q^2$ matrices $A^{ij} \neq 0$ dont q^2 sont déterminées par les q^2 autres,

---

(1) *Comparer* Netto, *A. M.*, t. XIX, p. 105 (1895).

(2) Loewy, *N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, p. 387.

lesquelles renferment encore chacune $m-1$ arbitraires, et, dans $\mathfrak{A}_{1\rho}$ ($\rho \geqq 2$), $2qq_\rho A^{ij} \neq 0$ renfermant encore chacune m_ρ arbitraires; donc

$$(5)\quad \begin{cases} N(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots) = N_1 + N(Q_2, m_{Q_2}; \ldots), \\ N_1 = q^2(m-1) + 2q(m_2 q_2 + m_3 q_3 + \ldots) = q^2(m-1) + q(n - mq). \end{cases}$$

Si $st = 1$, il y a, dans $\mathfrak{A}_{11}$, $q^2 - q A^{ij}$ $(i \neq j)$ dont $\frac{q^2-q}{2}$ sont déterminées par les $\frac{q^2-q}{2}$ autres, lesquelles renferment encore chacune $m-1$ arbitraires, plus $q^2 A^{ii}$ contenant encore chacune un nombre $\psi(m)$ d'arbitraires égal à $E\left(\frac{m}{2}\right)$ si $\bar{a} = a$, à $E\left(\frac{m-1}{2}\right)$ si $\bar{a} = -a$ ou si $\bar{a} = \alpha a$, à $\frac{m-1}{2}$ $\Big($en comptant pour $\frac{1}{2}$ une partie réelle ou imaginaire indéterminée$\Big)$ si $\bar{a} = \dot{a}$ ou si $\bar{a} = \alpha \dot{a}$; donc

$$(6)\quad \begin{cases} N(Q_1, m_{Q_1}; \ldots) = N_1 + N(Q_2, m_{Q_2}; \ldots), \\ N_1 = \dfrac{q^2-q}{2}(m-1) + q\psi(m) + q(n-mq). \end{cases}$$

12. Il est aisé, d'après ce qui précède, de trouver toutes les matrices *a inversibles ou non* telles que

$$\bar{a} = \alpha a \qquad (\text{ou } \bar{a} = \alpha \dot{a})$$

[d'où, on l'a vu,

$$\alpha a \bar{\alpha} = a \qquad (\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a)].$$

Les racines de $|\alpha - s\varepsilon|$ se répartissent en quatre catégories possibles : 1° les racines égales à ± 1 (de module 1, si $\bar{a} = \alpha \dot{a}$); 2° les racines $s_i \neq \pm 1$ (de module $\neq 1$) telles que s_i^{-1} $(\dot{s}_i^{-1})$ soit aussi une racine et que les exposants des diviseurs élémentaires relatifs à s_i et à s_i^{-1} $(\dot{s}_i^{-1})$ soient les mêmes; 3° les racines s_i telles que s_i^{-1} $(\dot{s}_i^{-1})$ soit aussi racine, mais que les exposants des diviseurs élémentaires relatifs à s_i et à s_i^{-1} $(\dot{s}_i^{-1})$ ne soient pas les mêmes; 4° les racines restantes.

Soient encore x_k^i la $k^{\text{ième}}$ variable de la $i^{\text{ième}}$ suite; y_k^i la $k^{\text{ième}}$ variable de la $i^{\text{ième}}$ suite d'une seconde série de variables cogrédientes aux x_k^i (aux $\dot{x}_k^i$ si $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a$), y_k^i correspondant à x_k^i et l'ordre des suites étant provisoirement arbitraire; σ_i le multiplicateur et m_i le nombre des variables de la $i^{\text{ième}}$ suite;

$$A^{ij} = \Sigma a_{kl}^{ij} x_k^i y_l^j$$

la partie de a où figurent les x de la $i^{\text{ième}}$ suite et les y de la $j^{\text{ième}}$. Les seules $A^{ij} \neq 0$ sont celles où

$$\sigma_i \sigma_j = 1 \qquad (\sigma_i \dot{\sigma}_j = 1).$$

et les a_{kl}^{ij} sont liés par (1) et (4) seulement.

Admettons, pour fixer les idées, qu'il y ait des racines des quatre catégories, que

$$\sigma_1 = \ldots = \sigma_f = 1,$$

que

$$\sigma_{f+1} = \ldots = \sigma_{f_1} = -1$$

(que

$$|\sigma_1| = \ldots = |\sigma_{f_1}| = 1 \qquad \text{si} \qquad \bar{a} = \alpha \dot{a}),$$

que

$$\sigma_{f_1+1}, \quad \ldots, \quad \sigma_{f_2}$$

soient de la seconde catégorie, σ_{f_1+2i-1} étant égal à $\sigma_{f_1+2i}^{-1}$ (à $\dot{\sigma}_{f_1+2i}^{-1}$ si $\bar{a} = \alpha \dot{a}$), et donnent lieu à des diviseurs élémentaires de mêmes exposants rangés comme au n° **3**, que

$$\sigma_{f_2+1}, \quad \ldots, \quad \sigma_{f_3}$$

soient de la troisième catégorie et $\sigma_{f_3+1}, \ldots, \sigma_{f_4}$ de la quatrième. Soient a' la matrice des A^{ij} où i et j sont $\leq f_2$, a'' la matrice des A^{ij} où i et j sont $> f_2$ et $\leq f_3$, $a'''(=0)$ la matrice des A^{ij} où i et j sont $> f_3$. a aura la forme

$$\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a'' & 0 \\ 0 & 0 & a''' \end{pmatrix}.$$

a' se détermine comme on déterminait a quand $|a|$ était $\neq 0$, mais en omettant les conditions du n° **4**. a'' de même; les A^{ii} y sont nulles; chaque A^{ij} de a'' située au-dessous de la diagonale principale sera déterminée par A^{ji} d'après (4); chaque A^{ij} de a'' située au-dessus de cette diagonale sera déterminée, d'après (1), par les m_{ij} premiers éléments de sa première ligne, m_{ij} étant le plus petit des nombres m_i et m_j. Le nombre N des arbitraires figurant dans la solution générale a

de $\bar{a} = \alpha a$ et celui N′ des arbitraires entrant dans la solution générale de $\bar{a} = \alpha \dot{a}$ se calculent aisément, d'après ce qui précède, à l'aide de formules analogues à (5), (6) (on n'aura plus ici à choisir séparément les éléments de $A^{1m''\varphi_2}_{\rho\rho}$ de manière que $|A^{1m''\varphi_2}_{\rho\rho}|$ soit $\neq 0$) qu'il est inutile d'écrire.

On peut d'ailleurs ramener la détermination de a à un problème déjà traité. Soit c une solution *invertible* de

$$\bar{c} = -\alpha c \qquad (\bar{c} = -\alpha \dot{c}).$$

En posant

$$a = xc,$$

l'équation

$$\bar{a} = \alpha a \qquad (\bar{a} = \alpha \dot{a})$$

devient

$$xc = -c\bar{x} \qquad (xc = -c\dot{\bar{x}}),$$

d'où, en transposant et en éliminant $\bar{x}$ (en transposant, en passant aux conjuguées et en éliminant $\dot{\bar{x}}$),

$$x\alpha = \alpha x \qquad (x\dot{\alpha} = \dot{\alpha} x).$$

La condition que x soit permutable à α (à $\dot{\alpha}$) suffit d'ailleurs, comme on le voit immédiatement, pour que

$$a = \frac{1}{2}(xc - c\bar{x}) \qquad \left[a = \frac{1}{2}(xc - c\dot{\bar{x}})\right]$$

vérifie

$$\bar{a} = \alpha a \qquad (\bar{a} = \alpha \dot{a}) \quad [1].$$

Donc, x parcourant les matrices permutables à α (à $\dot{\alpha}$),

$$\frac{1}{2}(xc - c\bar{x}) \qquad \left[\frac{1}{2}(xc - c\dot{\bar{x}})\right]$$

parcourt toutes les solutions de $\bar{a} = \alpha a$ (de $\bar{a} = \alpha \dot{a}$). Pour que deux matrices x et $x + y$ permutables à α (à $\dot{\alpha}$) fournissent la même solu-

---

[1] *Cf.* Voss, *A. A. M.*, t. XVII, p. 331 (1890).

tion a, il faut donc et suffit que

$$yc = c\bar{y} \qquad (yc = c\dot{\bar{y}}) \quad (^1).$$

Soient M le nombre d'arbitraires entrant dans la solution générale de

$$yc = c\bar{y},$$

M′ le nombre analogue relatif à

$$yc = c\dot{\bar{y}}.$$

(P′) le nombre d'arbitraires entrant dans la matrice la plus générale permutable à α (à $\dot{\alpha}$). Les matrices permutables à α (à $\dot{\alpha}$) forment un groupe additif abélien dont les matrices y forment un diviseur, et l'on aura

$$\mathrm{P} = \mathrm{M} + \mathrm{N} \qquad (\mathrm{P}' = \mathrm{M}' + \mathrm{N}').$$

Donc

$$\mathrm{M} = \mathrm{P} - \mathrm{N} \qquad (\mathrm{M}' = \mathrm{P}' - \mathrm{N}') \quad (^2).$$

15. Revenons au cas où $|a| \neq 0$, et soit

$$\bar{a} = \pm a \qquad \text{ou} \qquad \bar{a} = \dot{a}.$$

On peut, par un changement de variables *conservant la forme canonique de α et de β* (les y étant regardés comme cogrédients aux x si $\bar{a} = \pm a$, aux $\dot{x}$ si $\bar{a} = \dot{a}$), ramener a à une forme simple complètement déterminée. On verra d'abord comme au n° 6 que, si A^{ij} $(i, j \leq q)$ est de rang m, on peut supposer que toutes les $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$ où $\lambda = i$ avec $\mu \neq j$, ou $\lambda \neq i$ avec $\mu = j$, sont nulles et se borner par suite à déterminer A_{11}. *De plus, si $st = 1$ avec $\bar{a} = a$ et m pair, ou avec $\bar{a} = -a$ et m impair* (*q est ici pair*), on peut supposer que les A^{ii}, dont le rang est alors $< m$, sont nulles et, en choisissant bien les notations, que A^{12} et A^{21} sont

---

(1) Cette équation exige que y soit permutable à α (à $\dot{\alpha}$) : on le voit comme tout à l'heure pour x.

(2) C'est la généralisation des résultats obtenus autrement par M. Voss [*S. A. M.*, t. XXVI, p. 211-272 (1896)].

de rang m, les autres A^{1i}, A^{i1}, A^{2i}, A^{i2} étant nulles; puis, si $q > 4$, que A^{34} et A^{43} sont de rang m, les autres A^{3i}, A^{i3}, A^{4i}, A^{i4} étant nulles, etc. (on retrouve ainsi que q est pair). *Si $st \neq 1$, les A^{ii} sont nulles nécessairement, et l'on peut opérer la même réduction.*

On remarquera que, quel que soit st, A^{1m}_{11} est alternée pour $\overline{a} = a$ avec m pair et pour $\overline{a} = -a$ avec m impair, symétrique pour $\overline{a} = a$ avec m impair et pour $\overline{a} = -a$ avec m pair; la matrice $i^{m-1} A^{1m}_{11}$ est hermitienne pour $\overline{a} = \dot{a}$. *Si donc $st = 1$ avec $\overline{a} = a$ et m impair, ou avec $\overline{a} = -a$ et m pair, ou avec $\overline{a} = \dot{a}$,* on pourra ramener A^{1m}_{11} à la forme diagonale par une substitution du groupe des sous-séries relatif à α. Après un changement de variables produisant cet effet, les A^{ii} sont toutes de rang m ($|A^{1m}_{11}|$ est $\neq 0$), et, en opérant comme tout à l'heure, on annulera les A^{ij} où $i \neq j$.

14. On peut aller plus loin. Tout d'abord, *si $st \neq 1$, ou si $st = 1$ avec $\overline{a} = a$ et m pair, ou avec $\overline{a} = -a$ et m impair, on ramène A^{12}, A^{34}, ... à la forme bilinéaire type,* comme au n° **6**.

Soit $st = 1$ et m impair $= 2\mu - 1$ avec $\overline{a} = a$ ou $\overline{a} = \dot{a}$. Si $\overline{a} = \dot{a}$, on ne pourra pas toujours ramener les a^{jj}_{1m} à des valeurs arbitraires. En effet, soient $\Sigma\xi$ le groupe des sous-séries et $\Sigma\gamma$ le groupe des additions relatifs à α. Toute substitution permutable à α est de la forme $\xi\gamma$, et, si $\xi\gamma$ change la forme réduite

$$\Sigma_1^q a^{jj}_{1m} x^j_1 y^j_m$$

de A^{1m}_{11} en

$$\Sigma_1^q b^{jj}_{1m} x^j_1 y^j_m,$$

il est clair que ξ opère déjà à elle seule ce changement. Or ξ, qui transforme les a^{jj}_{1m} comme si on l'appliquait à la forme *hermitienne*

$$\Sigma_1^q a^{jj}_{1m} x^j_1 \dot{x}^j_m$$

(**6**), permet seulement de les réduire à des valeurs absolues arbitraires, le nombre de ceux qui sont positifs restant inaltéré. *Il y a donc, pour A^{1m}_{11}, q types distincts. Si $\overline{a} = a$,* au contraire (A^{1m}_{11} est alors symétrique), comme on peut employer des substitutions ξ non réelles,

$\mathfrak{S}$ contenant les nombres complexes, *on pourra donner aux* a^{jj}_{1m} *des valeurs arbitraires.*

Soit e_0 une valeur réelle, positive, arbitraire. Je supposerai que, si $\bar{a} = a$, a^{jj}_{1m} est égal à e_0 pour $j = 1, \ldots, q$, et que, si $\bar{a} = \dot{a}$, l'indice d'inertie de A^{1m}_{11} (quand on remplace y^j_m par x^j_1) étant η, a^{jj}_{1m} est égal à e_0 pour $j \leq \eta$, à $-e_0$ pour $j > \eta$. Je désignerai alors par $e^j = e$ la valeur de $a^{jj}_{\mu\mu} = (-1)^{\mu-1} a^{jj}_{1m}$.

Si $\bar{a} = a$, (1) exige que $a^{jj}_{\mu-1,\mu}$ soit égal à $-\frac{e}{2}\cdot$ *Si* $\bar{a} = \dot{a}$, (1) exige seulement que la partie réelle de $a^{jj}_{\mu-1,\mu}$ soit égale à $-\frac{e}{2}\cdot$ En déterminant convenablement λ dans

$$w = |x^j_\rho, x^j_\rho + \lambda x^j_{\rho-1}| \qquad (\rho = 2, \ldots, m; \alpha w = w\alpha).$$

et en prenant $wa\bar{w}$ pour a, on aura encore $a^{jj}_{\mu-1,\mu} = -\frac{e}{2}$ (la transversale étant ici réelle, cela conduit à une équation de la forme $\lambda - \dot{\lambda} = ic$, c étant réel); mais je supposerai plus généralement (en vue du cas où $\mathfrak{S}$ aura le module 2) qu'on prend pour $a^{jj}_{\mu-1,\mu} = x$ une solution arbitraire de l'équation

$$x + \dot{x} = -e,$$

qui résulte de (1) et (3). Dans les deux cas $\bar{a} = a$, $\bar{a} = \dot{a}$, je désignerai par $f^j = f$ la valeur de $a^{jj}_{\mu-1,\mu}$.

Si $\bar{a} = a$, on peut ensuite annuler $a^{jj}_{11}, a^{jj}_{22}, \ldots, a^{jj}_{\mu-1,\mu-1}$; car, si $a^{jj}_{\mu-k,\mu-k}$ est le premier en commençant par la droite qui soit $\neq 0$, en déterminant convenablement λ dans

$$w = |x^j_\rho, x^j_\rho + \lambda x^j_{\rho-2k}| \qquad (\rho = 2k+1, \ldots, m; \alpha w = w\alpha),$$

et en prenant $wa\bar{w}$ pour a, $a^{jj}_{\mu-k,\mu-k}$ sera nul. Alors, d'après (1) et (3), les a^{jj}_{kl} où k et l sont $< \mu$ sont nuls. *Si* $\bar{a} = \dot{a}$, on pourra annuler de même $a^{jj}_{\mu-k,\mu-k}$ (qui est réel) en prenant $wa\bar{w}$ pour a, ce qui conduit pour λ à une équation de la forme $\lambda + \dot{\lambda} = c$, c étant réel. Mais de la nullité de $a^{jj}_{11}, \ldots, a^{jj}_{\mu-1,\mu-1}$ résulte seulement que $a^{jj}_{12}, a^{jj}_{23}, \ldots, a^{jj}_{\mu-2,\mu-1}$ sont purement imaginaires. On pourra cependant les annuler encore : car, si $a^{jj}_{\mu-k-1,\mu-k}$ est le premier en commençant par la droite qui soit $\neq 0$, en choisissant convenablement λ dans

$$w = |x_\rho^j, x_\rho^j + \lambda x_{\rho-2k-1}^j| \qquad (\rho = 2k+2, \ldots, m; \alpha w = w\alpha)$$

et en prenant $wa\bar{w}$ pour a, $a_{\mu-k-1,\mu-k}^{jj}$ sera nul (l'équation que doit vérifier λ est de la forme $\lambda - \bar{\lambda} = ic$, c étant réel); *alors tous les* a_{kl}^{jj} *où* k *et* l *sont* $< \mu$ *sont nuls.* On voit d'ailleurs sur la figure que la matrice d'ordre μ formée des a_{kl}^{jj} où $k = 1, \ldots, \mu$ et $l = \mu, \ldots, m$ est complètement déterminée par $a_{\mu\mu}^{jj}$, $a_{\mu-1,\mu}^{jj}$ et (1). *Donc elle est la somme de deux matrices d'ordre* μ, *l'une du premier type* (**6**) *multipliée par* $e - f$, *l'autre du second type multipliée par* f (¹).

Soient $st = 1$ *et* m *pair* $= 2\mu$ *avec* $\bar{a} = -a$ *ou* $\bar{a} = a$. *Si* $\bar{a} = -a$, A_{11}^{1m} *est encore symétrique, et l'on peut donner aux* a_{1m}^{jj} *des valeurs arbitraires. Si* $\bar{a} = a$, *la matrice* iA_{11}^{1m} *est hermitienne et a* q *types distincts.*

e_0 étant toujours une valeur réelle, positive, arbitraire, je supposerai que, si $\bar{a} = -a$, $a_{1m}^{jj} = e_0$ pour $j = 1, \ldots, q$, et que, si $\bar{a} = a$, l'indice d'inertie de iA_{11}^{1m} (quand on y remplace y_m^j par x_1^j) étant η, a_{1m}^{jj} est égal à ie_0 pour $j \leqq \eta$, à $-ie_0$ pour $j > \eta$, et je désignerai par

$$e^j = e$$

la valeur de

$$a_{\mu,\mu+1}^{jj} = (-1)^{\mu-1} a_{1m}^{jj}.$$

Si $\bar{a} = -a$, on peut supposer $a_{12}^{jj}, a_{23}^{jj}, \ldots, a_{\mu-1,\mu}^{jj}$ nuls; car, si $a_{\mu-k-1,\mu-k}^{jj}$ est le premier en commençant par la droite qui soit $\neq 0$, en choisissant convenablement λ dans

$$w = |x_\rho^j, x_\rho^j + \lambda x_{\rho-2k-2}^j| \qquad (\rho = 2k+3, \ldots, m)$$

et en prenant $wa\bar{w}$ pour a, $a_{\mu-k-1,\mu-k}^{jj}$ sera nul. Alors, d'après (1) et (3), les a_{kl}^{jj} où k et l sont $\leqq \mu$ sont nuls. *Si* $\bar{a} = a$, on annulera d'abord la diagonale (réelle) en prenant $wa\bar{w}$ pour a, w ayant la forme

$$|x_\rho^j, x_\rho^j + \lambda x_{\rho-2k-1}^j| \qquad (\rho = 2k+2, \ldots, m),$$

(¹) Pour le cas $\bar{a} = a$, *cf.* JORDAN, *J. M.*, 1888.

ce qui conduit pour λ à une équation du type $\lambda - \bar{\lambda} = ic$, c étant réel (la transversale principale est ici purement imaginaire); $a^{jj}_{\mu\ \ k-1,\ \mu-k}$ est alors purement imaginaire, on l'annulera comme dans le cas $\bar{a} = -a$ (d'où pour λ une équation du type $\lambda + \bar{\lambda} = c$, c étant réel), et finalement *les* a^{jj}_{kl} *où* k *et* l *sont* $\geq \mu$ *pourront être supposés nuls.*

La matrice des $e^{-1} a^{jj}_{kl}$ *où*

$$k = 1, \ldots \mu \qquad \text{et} \qquad l = \mu + 1, \ldots m$$

est évidemment du second type (6).

15. *Soit maintenant*

$$\bar{a} = \alpha a.$$

Comme précédemment, il suffit de déterminer $\mathcal{A}_{11}$.

Remarquons d'abord que, si $st = 1$, donc $\varkappa = 1$, comme ici $\beta = \alpha$, on a

$$s = t = \pm 1,$$

et (4) donne

$$a^{ji}_{1m} = t a^{ij}_{m1}$$

ou

$$\bar{A}^{1m}_{11} = (-1)^{m-1} t A^{1m}_{11}.$$

Si $s = t = 1$ *avec* m *pair, ou si* $s = t = -1$ *avec* m *impair*, le rang des A^{jj} étant d'une parité différente de celle de m, on peut supposer les A^{jj} nulles et annuler toutes les A^{ij} sauf les $A^{2j-1,2j}$ et les $A^{2j,2j-1}$ [on a vu (9) que q était pair dans l'hypothèse actuelle, et on le retrouverait d'ailleurs ici]. *Si* $st \neq 1$, les A^{jj} sont nécessairement nulles, et l'on opérera de même. On donnera à A^{12}, A^{34}, ... la forme type, et A^{21}, A^{43}, ... seront déterminées par (4). *Si* $s = t = 1$ *avec* m *impair, ou si* $s = t = -1$ *avec* m *pair*, A^{1m}_{11} est symétrique et se ramène à la même forme diagonale qu'au n° **14** (dont je reprendrai les notations). *Si* $s = t = 1$ *avec* m *impair* $= 2\mu - 1$, les $a^{jj}_{k,k+1}$ sont nuls d'après (4). On annulera par des additions de transversales les $a^{jj}_{11}, \ldots,$ $a^{jj}_{\mu-1,\mu-1}$. Alors *tous les* a^{jj}_{kl} *où* k *et* l *sont* $< \mu$ *sont nuls, et la matrice des* $e^{-1} a^{jj}_{kl}$ *où* $k = 1, \ldots, \mu$ *et* $l = \mu, \ldots, m$ *est réduite au premier type. Si* $s = t = -1$ *avec* m *pair* $= 2\mu$, on annulera d'abord a^{jj}_{12}, $a^{jj}_{23}, \ldots, a^{jj}_{\mu-1,\mu}$ par des additions de transversales. Alors, d'après (1) et (4), *tous les* a^{jj}_{kl} *où* k *est* $< \mu$ *et* $l \geqq \mu$ *sont nuls, et la matrice des* $e^{-1}a^{jj}_{kl}$ *où* $k = 1, \dots, \mu$ *et* $l = \mu + 1, \dots, m$ *est la somme de deux matrices d'ordre* μ, *l'une du premier, l'autre du second type.*

16. *Soit enfin*

$$\bar{a} = \alpha a.$$

Si $st \neq 1$, on procédera comme dans le cas précédent. *Si* $st = 1$ *(ici* $t = \dot{s}$*), en prenant* $a\rho$ *pour* a, ρ *étant une racine de* $\rho^2 = t$, *on peut supposer que, dans* (4), $t = 1$. On a alors

$$\dot{a}^{ji}_{1m} = \dot{a}^{ij}_{m1} = (-1)^{m-1}\dot{a}^{ij}_{1m}.$$

Donc $i^{m-1}\mathrm{A}^{1m}_{11}$ est hermitienne et peut se ramener à la même forme réduite qu'au n° **14** (dont je reprendrai les notations).

Si m *est impair* $= 2\mu - 1$, la transversale de A^{jj} est réelle. Comme, d'après (4),

$$\dot{a}^{jj}_{k,k+1} = a^{jj}_{kk} - \dot{a}^{jj}_{kk}$$

est purement imaginaire, on pourra, par des additions de transversales, annuler les $a^{jj}_{12}, a^{jj}_{23}, \dots, a^{jj}_{\mu-1,\mu}$. Alors $a^{jj}_{11}, \dots, a^{jj}_{\mu-1,\mu-1}$ sont réels, et par des additions de transversales on pourra les annuler, ce qui, d'après (1), *entraîne la nullité de tous les* a^{jj}_{kl} *où* k *et* l *sont* $< \mu$. *La matrice des* $e^{-1}a^{jj}_{kl}$ *où* $k = 1, \dots, \mu$ *et* $l = \mu, \dots, m$ *se trouve ainsi réduite au premier type* (**6**).

Si m *est pair* $= 2\mu$, la transversale de A^{jj} est purement imaginaire. Mais on pourra procéder de même pour *annuler les* a^{jj}_{kl} *où* k *est* $< \mu$ *et* $l \geqq \mu$ et la partie réelle de $a^{jj}_{\mu\mu}$; alors la partie imaginaire de $a^{jj}_{\mu\mu}$ est déterminée, et *la matrice des* $e^{-1}a^{jj}_{kl}$ *où* $k = 1, \dots, \mu$ et $l = \mu + 1, \dots, m$ *est la somme de deux matrices d'ordre* μ, *l'une du premier, l'autre du second type.*

17. De la forme réduite obtenue dans le cas $\bar{a} = \dot{a}$ on déduit très simplement une inégalité établie d'abord par M. Lœwy (*N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, 1898). Opérons en effet sur cette forme réduite où je remplacerai y^k_j par $\dot{x}^k_i$ $\left(\text{en prenant } f \text{ égal à } -\frac{e}{2} \text{ pour } st = 1 \text{ et } m \text{ impair}\right)$ la substitution, non permutable à α en général, qui consiste à prendre, dans $A^{2j-1,2j}$ si $st \neq 1$, le coefficient de x_k^{2j-1} ($k = 1, \ldots, m_{2j}$) pour $\dot{x}^{2j}_{m_{2j}-k+1}$ (donc, dans $A^{2j,2j-1}$, celui de $\dot{x}_k^{2j-1}$ pour $x^{2j}_{m_{2j}-k+1}$), et, dans A^{jj} si $st = 1$, le coefficient de x_k^j $\left[k = 1, \ldots, E\left(\frac{m_j}{2}\right)\right]$ pour $\dot{x}_{m_j-k}$ [donc celui de $(-1)^{m_j-1}\dot{x}_k^j$ pour $x^j_{m_j-k}$]. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{2j-1,2j} \\ A^{2j,2j-1} & 0 \end{pmatrix}$$

si $st \neq 1$, et la matrice A^{jj} si $st = 1$, seront alors réduites à leurs transversales principales. En observant que les formes

$$x\dot{y} + y\dot{x} \quad \text{et} \quad i(x\dot{y} - y\dot{x})$$

se transforment, par les substitutions respectives

$$(x, y;\, x + y,\, x - y), \qquad (x, y;\, x + iy,\, ix + y),$$

en

$$2(x\dot{x} - y\dot{y}),$$

on voit directement que la caractéristique de

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{2j-1,2j} \\ A^{2j,2j-1} & 0 \end{pmatrix}$$

pour $st \neq 1$ est m_{2j}, et que celle de A^{jj} pour $st = 1$ est $E\left(\frac{m_j}{2}\right)$. Donc, la caractéristique (¹) c de a étant au moins égale à la somme des caractéristiques de ses composantes, *on a*

$$c \geqq \frac{1}{2}\Sigma m' + \Sigma E\left(\frac{m''}{2}\right), \tag{7}$$

m' parcourant les exposants des diviseurs élémentaires de $\alpha - s$ relatifs aux racines s telles que st soit $\neq 1$ (pour chacun d'eux $\alpha = 2$) et m'' les autres.

(¹) Si une forme hermitienne a à n variables est réductible (par transformation linéaire) à la forme

$$\Sigma_1^h x_i\dot{x}_i - \Sigma_{h+1}^r x_j\dot{x}_j \qquad (r \leqq n),$$

M. Lœwy appelle *caractéristique* de a le plus petit des deux nombres h, $r-h$ (*N. A. H.*, t. LXXI, nº 8, 1898).

Si l'on se donne c et une substitution n-aire vérifiant (7) (outre les conditions déjà rencontrées), la méthode précédente fournit directement, conjointement à la forme canonique α de cette substitution et à la substitution corrélative β, une forme hermitienne réduite a de déterminant $\neq 0$ et de caractéristique c telle que

$$\beta a \bar{\alpha} = a;$$

car, en faisant varier le signe des composantes de caractéristiques $E\left(\frac{m'}{2}\right)$ de a, on fait prendre à la caractéristique de a toutes les valeurs possibles, depuis son minimum qui est le second membre de (7) jusqu'à son maximum $E\left(\frac{n}{2}\right)$ (*cf.* Lœwy, *loc. cit.*).

18. *Supposons maintenant que $\mathfrak{S}$ soit un champ quelconque.* — Prenons toujours les variables canoniques de α et cherchons à construire a dans le champ $\mathfrak{S}_\alpha$ résultant de l'adjonction à $\mathfrak{S}$ des multiplicateurs de α. Une condition nouvelle *de réalité* intervient : c'est qu'en repassant aux variables primitives, a soit dans $\mathfrak{S}$. Soit

$$|\alpha - s\varepsilon| = (-1)^n \Pi_l f_l(s)^{\tau_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots),$$

$f_l(s) = \Pi_{\rho=1}^{\nu_l}(s - s_{l\rho})$ étant irréductible dans $\mathfrak{S}$ ($f_1 = f$; $\nu_1 = \nu$; $\tau_1 = \tau$; $s_{1\rho} = s_\rho$; $s_1 = s$). Supposons aussi β sous forme canonique, et qu'on puisse établir, entre les variables canoniques de α et de β une correspondance telle que les multiplicateurs

$$t_{l1}, \quad \ldots, \quad t_{l\nu_l} \qquad (t_{1\rho} = t_\rho, t_1 = t)$$

de β qui correspondent ainsi à $s_{l1}, \ldots, s_{l\nu_l}$ soient racines d'un facteur irréductible

$$\varphi_l(s) = \Pi_{\rho=1}^{\nu_l}(s - t_{l\rho})$$

de $|\beta - s\varepsilon|$. D'après le n° **2**, $|\beta - s\varepsilon|$ est de la forme

$$(-1)^n \Pi_l g_l(s)^{\tau_l}, \qquad \text{où} \qquad g_l(s) = \Pi_{\rho=1}^{\nu_l}(s - s_{l\rho}^{-1}) = c_l^{-1} s^{\nu_l} f_l(s^{-1}) \qquad [c_l = f_l(0)].$$

Soient α_l et β_l les parties de α, β dont les déterminants caractéristiques sont $f_l(s)^{\tau_l}$ et $\varphi_l(s)^{\tau_l}$ respectivement. Les τ_l variables

$$z_l^{\lambda\rho} \qquad (z_l^{1\rho} \quad z_l^{\rho})$$

du système qui répond, dans α, à $s_{l\rho}$ (je les supposerai rangées de manière que $z_{j+1}^{l\rho}$ soit la variable qui vient après $z_j^{l\rho}$ dans la même suite, ou la première variable d'une nouvelle suite, selon que $z_j^{l\rho}$ n'est pas ou est la dernière variable d'une suite) sont de la forme

$$z_i^{l\rho} = \Sigma_{k=0}^{\nu_l-1} s_{l\rho}^k x_{ik}^l,$$

les x_{ik}^l ($x_{ik}^1 = x_{ik}$) étant des fonctions linéaires des x_i à coefficients dans $\mathfrak{S}$. Soient

$$u_i^{l\rho} = \Sigma_{k=0}^{\nu_l-1} t_{l\rho}^k y_{ik}^l,$$

les y_{ik}^l ($y_{ik}^1 = y_{ik}$) étant des fonctions linéaires des y_i à coefficients dans $\mathfrak{S}$, les variables de β_l, $u_i^{l\rho}$ ($u_i^{1\rho} = u_i^\rho$), étant la variable correspondant à $z_i^{l\rho}$. Soient α_l^ρ l'action de α sur $z_1^{l\rho}, \ldots, z_{\tau_l}^{l\rho}$; β_l^ρ celle de β sur $u_1^{l\rho}, \ldots, u_{\tau_l}^{l\rho}$; a_l^ρ ($a_1^\rho = a^\rho$) la partie de a où figurent seulement, avec $z_1^{l\rho}, \ldots, z_{\tau_l}^{l\rho}$, les $u_i^{l'\rho'}$ répondant à $t_{l'\rho'} = s_{l\rho}^{-1}$ (à chaque suite de α relative à $s_{l\rho}$ répond, dans β, une suite également nombreuse relative à $t_{l'\rho'}$) : on voit que

$$\varphi_{l'} = g_l, \qquad \nu_{l'} = \nu_l, \qquad \tau_{l'} = \tau_l.$$

On peut évidemment numéroter les $t_{l'\rho'}$ de manière que $t_{l'\rho} = s_{l\rho}^{-1}$ si $\varphi_{l'} \neq f_l$ (*cf.* **5**) et que $t_{l'\rho} = s_{l\rho}$ si $\varphi_{l'} = f_l$. Si $\varphi_{l'} = f_l$, comme f_l est irréductible, ν est pair ou égal à 1 : si ν est pair $= 2\nu'$, on peut en outre numéroter les $s_{l\rho}$ de manière que

$$s_{l,\nu'+\rho} = s_{l\rho}^{-1} \qquad \text{et} \qquad s_{l\rho} = s_{l,\nu'+\rho}^{-1} \qquad (\rho = 1, \ldots, \nu');$$

si $\nu = 1$,

$$t_{l1} = s_{l1} = -1.$$

Si donc $\varphi_{l'} \neq f_l$, on aura

$$\text{(8)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_l^\rho = \Sigma_{jj'} a_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}) z_j^{l\rho} u_{j'}^{l'\rho} = \Sigma_{jj'kk'} a_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}) s_{l\rho}^{k-k'} x_{jk}^l y_{j'k'}^{l'} \\ \qquad (j, j' = 1, \ldots, \tau_l;\ k, k' = 0, \ldots, \nu_l - 1), \end{array} \right.$$

$a_{jj'}^{l\rho}(x)$ étant un polynome de degré $< \nu_l$ à coefficients dans $\mathfrak{S}$. Si $\varphi_{l'} = f_l$, on aura

$$\text{(9)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_l^\rho = \Sigma_{jj'} a_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}) z_j^{l\rho} u_{j'}^{l,\nu'+\rho} = \Sigma_{jj'kk'} a_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}) s_{l\rho}^{k-k'} x_{jk}^l y_{j'k'}^l \\ \qquad (j, j' = 1, \ldots, \tau_l;\ k, k' = 0, \ldots, \nu_l - 1). \end{array} \right.$$

J'écrirai $a_{jj'}^\rho$ pour $a_{jj'}^{1\rho}$ et h pour l' quand $l = 1$.

Soit a_l la somme des matrices composantes $a_l^1, \ldots, a_l^{\nu}$. Comme on peut exprimer dans $\mathfrak{S}\alpha_l, \beta_l$ (*E.*, 204) et par suite $a_l(\mathbf{2})$, on pourra, en faisant jouer à $\mathfrak{S}(s_\rho)$ (¹) le rôle de $\mathfrak{S}$ et à a^ρ celui de a_l, exprimer a^ρ dans $\mathfrak{S}(s_\rho)$ par les x_{jk}^l et les y_{jk}^l. De plus, comme $a_1 = \Sigma a^\rho$, étant dans $\mathfrak{S}$, est fonction symétrique des s_ρ, a^ρ *se déduit de* a^1 *par le changement de* s *en* s_ρ [en considérant le coefficient de $x_{j0} y_{j'0}^h$ dans a_1, on voit que seul le terme constant de $a_{jj'}^\rho(x)$ pourrait dépendre de ρ; mais le terme en $x_{j1} y_{j'0}^h$ montre qu'il n'en dépend pas].

Si $\varphi_h \neq f_1$, comme $t_{h\rho} = s_\rho^{-1}$, a^1 vérifie $\beta_h^1 a^1 \bar{\alpha}_1^1 = a^1$, β_h^1 agissant sur les u_j^{h1} comme α_1^1 sur les z_j^1 sauf que s est remplacé par $t_{h1} = s^{-1}(\mathbf{2})$. On pourra donc déterminer a^1 dans $\mathfrak{S}(s)$ sans s'occuper de la condition de réalité qui revient à ce que a^ρ se déduit de a^1 par le changement de s en s_ρ, et qui sert par suite à déterminer les a^ρ où ρ est > 1. La détermination de a^1 dans $\mathfrak{S}(s)$ rentre dans le problème traité au n° 6 (²).

Si $\varphi_1 = f_1$ et $\nu = 2\nu'$, a^1 vérifie $\beta_1^{\nu'+1} a^1 \bar{\alpha}_1^1 = a^1$ où $\beta_1^{\nu'+1} = \alpha_1^{\nu'+1}$, et l'on opérera de même. Si $\varphi_1 = f_1$ et $\nu = 1$, il n'y a pas de condition de réalité.

19. *Ajoutons maintenant l'hypothèse* $\bar{a} = \theta a (\theta = \pm 1)$, x_i *et* y_i *étant les variables correspondantes,* et astreignons-nous (*cf.* **7**) à n'introduire, dans les changements de variables, que des variables cogrédientes, de manière à conserver la propriété $\bar{a} = \theta a$. Je supposerai donc les $u_i^{l\rho}$ et les $z_i^{l\rho}$ cogrédients, $u_i^{l\rho}$ répondant à $z_i^{l\rho}$ (pour que les x_{ik}^l et les y_{ik}^l fussent cogrédients, il faudrait que $\beta = \alpha$).

Si $h > 1$, $a^1 = \Sigma_{ij} a_{ij} z_i^1 u_j^{h1}$ se détermine comme au n° **6**, et, puisque les variables z_i^1, u_j^{h1} ne se correspondent pas, on pourra prendre, pour les $a_{1m}^{ij} \neq 0$ (avec les notations du n° **6**) de la forme réduite, des valeurs arbitraires. La condition $\bar{a} = \theta a$ détermine a_h par a_1.

Soit $h = 1$, $\nu = 2\nu'$.

(¹) J'entends en général par $C(x, y, \ldots)$ le champ résultant de l'adjonction de $x, y, \ldots$ au champ C.

(²) Ici et dans ce qui va suivre, il est clair que les substitutions employées pour la réduction de a_1^1 doivent être accompagnées des substitutions conjuguées agissant sur $a_1^2, \ldots, a_1^{\nu}$, de manière que l'opération totale représente une substitution des variables primitives à coefficients dans $\mathfrak{S}$.

Ici

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad a^\rho = \Sigma_{ij} a^\rho_{ij} z_i^\rho u_j^{\nu+\rho}$$

et

$$a^\rho_{ij} = \theta a^{\nu+\rho}_{ji},$$

c'est-à-dire

$$a^1_{ji}(s_\rho) = \theta a^1_{ij}(s_\rho^{-1}).$$

On voit donc que, en posant

$$s^{-1} = \dot{s}, \qquad s + \dot{s} = b$$

(b est racine d'une équation de degré ν irréductible dans $\mathfrak{S}$; si $\mathfrak{S}$ a le module 2, b est $\neq 0$, sans quoi s^2 serait égal à 1, d'où $\nu = 1$).

$$s - \dot{s} = i,$$

et, en désignant d'une manière générale par $\dot{v}$ la conjuguée d'une matrice v relativement à $\mathfrak{S}(b) = \mathrm{C}$, s, $\dot{s}$ (si $\bar{v} = \dot{v}$, v sera dite *hermitienne* relativement à C, s, $\dot{s}$), a^1 *si* $\bar{a} = a$, *ou* ia^1 *si* $\bar{a} = -a$, *doit être hermitienne relativement à* C, s, $\dot{s}$, *les* $u_j^{\nu+1}$ *étant cogrédientes aux* $\dot{z}_j$. Si $\mathfrak{S}$ n'a pas le module 2, on a

$$s = \frac{b - i}{2}, \qquad \dot{s} = \frac{b - i}{2}.$$

$$\mathrm{C}(s) = \mathrm{C}(i),$$

et a^1 (ou ia^1) est aussi hermitienne relativement à C, i, $-i$.

Pour former a^1 ou ia^1 (que je prendrai maintenant pour a avec les notations du n° **14**) dans $\mathrm{C}(s)$, on peut opérer comme précédemment (dans le cas $s\dot{s} = 1$), C jouant le rôle du champ des nombres réels, et s, $\dot{s}$ celui des racines de $x^2 + 1 = 0$, en ajoutant les observations suivantes :

1° Bien qu'on puisse toujours ramener A_{11}^{1m} à la forme diagonale [1], on ne pourra, bien entendu, pas toujours réduire les a^{jj}_{1m} à des valeurs respectives e^j_0 arbitraires [sous la réserve des conditions (3) qui exigent en particulier, si $\mathfrak{S}$ a le module 2, que a^{jj}_{1m} soit dans C quelle que soit la parité de m]. Soit, par exemple, $q = 1$. a^{11}_{1m}, qui peut toujours

(1) DICKSON, *Transact. of the Am. Math. Soc.*, 1906, p. 280.

s'écrire $e_0^1 c^{-1}$, c étant quelconque dans C, ne peut être réduit qu'aux formes $e_0^1 c^{-1} u\dot{u}$, u étant dans C(s), et la condition

$$u\dot{u} = c$$

ou, en posant

$$u = u_0 + u_1 s$$

(u_0 et u_1 étant dans C),

$$u_0^2 + b u_0 u_1 + u_1^2 = c$$

ne peut pas toujours être vérifiée. Mais elle peut toujours l'être si $\mathfrak{C}$ est fini. De même, si $q > 1$ et si $\mathfrak{C}$ est fini, on pourra réduire a_{1m}^{jj} à e_0^j en remplaçant x_k^j par $\dot{u}^j x_k^j$. Lorsqu'on sera maître de choisir les e_0^j, je les supposerai égaux à e_0^1.

2° *Si $\mathfrak{C}$ n'a pas le module* 2, en introduisant i au lieu de s, la réduction s'achève comme au n° **14**.

Si $\mathfrak{C}$ a le module 2, i est dans C, et l'on doit se servir de l'irrationnelle s. Les éléments de la transversale principale sont toujours dans C. On peut donner à f la forme $f_1 s$, f_1 étant arbitraire dans C. Lorsque la diagonale principale est réduite à zéro, a_{12}^{jj}, a_{23}^{jj}, ..., $a_{\mu-2,\mu-1}^{jj}$ sont dans C. Le reste de l'analyse se poursuit comme au n° **14**, avec des modifications obvies, et l'on arrive encore aux mêmes résultats.

Soit enfin $h = \nu = 1$, donc $f = s \pm 1$.

β_1 est encore égale à α_1; mais il n'y a plus de condition de réalité. Si $\overline{a_1} = -a_1$, a_1 n'a qu'un type comme au n° **14**. Si $\overline{a_1} = a_1$, le nombre des types dépend encore de $\mathfrak{C}$, et de plus, ici, on ne pourra pas toujours réduire A_{11}^{1m} à la forme diagonale (1). Une fois la forme réduite de A_{11}^{1m} déterminée, on opérera d'ailleurs, pour $\overline{a_1} = \pm a_1$, comme au n° **14**.

---

(1) On vérifie par exemple directement que $xy' + yx'$, x' et y' étant cogrédientes à x et y, n'est pas équivalente à $xx' + yy'$ dans un champ fini de module 2. Pour préciser, si $\mathfrak{C}$ n'a pas le module 2, on pourra toujours par des additions symétriques de lignes et de colonnes réduire A_{11}^{1m} à la forme diagonale. Si $\mathfrak{C}$ a le module 2, on peut le réduire, comme l'a fait M. Jordan pour le cas où $\mathfrak{C}$ est fini (*J. M.*, 1905, p. 268), à la somme de deux matrices composantes dont l'une est diagonale, l'autre ayant la forme type d'une matrice alternée. Si de plus tout élément de $\mathfrak{C}$ est carré, on pourra pousser la réduction jusqu'au point où l'a poussée M. Jordan, c'est-à-dire réduire la composante diagonale à être d'ordre $\leqq 2$ et tous les coefficients à 1.

20. *Faisons maintenant l'hypothèse* $\bar{a} = \alpha a$, *donc* $\beta = \alpha$ (**8**).

Si $h > 1$, la condition $\bar{a} = \alpha a$ détermine, comme dans le cas précédent, a_h par a_1.

Soit $h = 1$, $\nu = 2\nu'$.

Désignons par $a'^{\rho}_{i,(j+1)}$ une quantité égale à 0 ou à $a'^{\rho}_{i,j+1}$ selon que u'^{ρ}_{j} est ou n'est pas la dernière variable d'une suite. On aura ici

$$a^{\nu'+\rho}_{ji} = s_{\nu'+\rho}(a^{\rho}_{ij} + a^{\rho}_{i,(j+1)}),$$

d'où, avec les notations de tout à l'heure,

$$(10) \qquad a^{1}_{ji}(s) = s[a^{1}_{ji}(\dot{s}) + a^{1}_{i,(j+1)}(s)] \qquad (\dot{s} = s^{-1}).$$

Désignons par ρ une racine de $\rho^2 = s$, et cherchons d'abord dans quel cas ρ est dans $C(s)$, c'est-à-dire dans quel cas ρ est de la forme $\rho_0 + \rho_1 s$, ρ_0 et ρ_1 étant dans C [alors $C(\rho) = C(s)$]. La condition

$$(\rho_0 + \rho_1 s)^2 = s$$

jointe à

$$s^2 = bs - 1$$

donne

$$\rho_1^2 = \rho_0^2, \qquad \rho_1(2\rho_0 + b\rho_1) = 1,$$

ou

$$(11) \qquad \rho_1 = \theta\rho_0 \qquad (\theta = \pm 1), \qquad \rho_0^2(b + 2\theta) = 1.$$

Donc, pour que ρ soit dans $C(s)$, il faut et suffit que $b + 2$ ou $b - 2$ soit carré dans C. Cela a toujours lieu si C est fini, car, ou bien C a le module 2 et la chose est évidente, ou bien $b^2 - 4$ est non carré ($s^2 = bs - 1$ est irréductible). De même si C est formé de tous les nombres réels, car, $b^2 - 4$ étant négatif, b est compris entre 2 et -2. Mais cela n'est pas nécessaire, car, si C est le champ des nombres rationnels, le produit de deux non-carrés peut être un non-carré.

Lorsque ρ est dans $C(s)$, la conjuguée $\dot{\rho}$ de $\rho = \rho_0(1 + \theta s)$ relativement à C, s, $\dot{s}$ est entièrement déterminée et l'on a, d'après (11),

$$(12) \qquad \rho\dot{\rho} = \rho_0^2(1 + \theta s)(1 + \theta\dot{s}) = \rho_0^2(b\theta + 2) = \theta.$$

Le polynome

$$\rho^4 - b\rho^2 + 1$$

qu'annule ρ est le produit de

$$\rho^2 - \frac{\theta}{\rho_0}\rho + 1$$

et de

$$\rho^2 + \frac{\theta}{\rho_0}\rho + 1.$$

Lorsque ρ n'est pas dans $C(s)$, on peut *convenir* que la conjuguée $\dot{\rho}$ de ρ est la racine carrée de $\dot{s}$ qui est égale à ρ^{-1}. Il est d'ailleurs facile de préciser. Le polynome

$$\rho^4 - b\rho^2 + 1$$

qu'annule ρ est le produit des deux facteurs

$$\rho^2 - \varphi\rho + 1 \qquad \text{et} \qquad \rho^2 + \varphi\rho - 1,$$

où $\varphi^2 = b + 2$. Or s n'est pas dans $C(\varphi)$: si en effet φ était de la forme $\varphi_0 + \varphi_1 s$ (φ_0 et φ_1 étant dans C et $\varphi_1 \neq 0$), l'équation $\varphi^2 = b + 2$ conduirait à

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 + s\varphi_1(b\varphi_1 + 2\varphi_0) = b + 2,$$

d'où $b\varphi_1 + 2\varphi_0 = 0$: cela exige d'abord que C n'ait pas le module 2, puis que $\frac{\varphi_0^2}{b^2}(b - 2) = 1$ contre l'hypothèse que $b + 2$ et $b - 2$ sont non carrés. s n'étant pas dans $C(\varphi) = C_1$, on peut se servir de C_1 au lieu de C : alors

$$s = \rho^2 \qquad \text{et} \qquad \dot{s} = \dot{\rho}^2,$$

et de même

$$a_{ij}^1(\rho^2) \qquad \text{et} \qquad a_{ij}^1(\dot{\rho}^2)$$

sont conjugués relativement à C_1, ρ, $\dot{\rho}$.

Supposons d'abord que $b + 2$ est carré ou que $b + 2$ et $b - 2$ sont non carrés. Alors $\rho\dot{\rho} = 1$, et (10) peut s'écrire

$$\rho^{-1} a_{ji}^1(\rho^2) = \dot{\rho}^{-1} a_{ij}^1(\dot{\rho}^2) + \dot{\rho}^{-1} a_{i,(j+1)}^1(\dot{\rho}^2). \tag{13}$$

Pour former $\rho^{-1}a^1$, que je prendrai pour a en revenant aux notations du n° **16**, on pourra alors opérer comme au même n° **16** (dans le cas $s\dot{s} = 1$) avec les modifications suivantes :

Désignons par x, y, z des éléments de la forme $\rho^{-1}\xi$, ξ étant dans

$C(s)$ (tous les a_{kl}^{ij} ont cette forme), et convenons d'appeler encore hermitienne une forme

$$c = \Sigma_{ik} c_{ik} z_i z_k \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

telle que $\bar{c} = \dot{c}$, c'est-à-dire telle que $c_{ki} = \dot{c}_{ik}$, les c_{ik} ayant la forme x : les c_{ii} ont la forme plus particulière $x + \dot{x}$ [car, si C n'a pas le module 2, on a

$$c_{ii} = \dot{c}_{ii} = \frac{1}{2}(c_{ii} + \dot{c}_{ii}).$$

et, si C a le module 2,

$$c_{ii} = b^{-1}(sc_{ii} + \dot{s}\dot{c}_{ii})].$$

Une telle forme se réduit, par une substitution des z_i à coefficients dans $C(s)$ jointe à la substitution conjuguée des $\dot{z}_i$, à la forme $(\rho + \dot{\rho})\Sigma_1^n z_i \dot{z}_i$. En effet, si les c_{ii} ne sont pas tous nuls, on peut supposer $c_{11} \neq 0$; si tous sont nuls, on peut, par une addition de colonnes à multiplicateur dans $C(s)$ suivie d'une addition symétrique de lignes à multiplicateur conjugué, rendre $c_{11} \neq 0$. Par de nouvelles additions de lignes et de colonnes de même sorte on annulera c_{1i} et c_{i1} pour $i > 1$ [cela conduit, pour chaque multiplicateur λ, à une équation de la forme $\lambda(x + \dot{x}) = y$, dont la solution λ est bien dans $C(s)$]. On opérera de même sur la matrice des c_{ik} où $i, k = 2, \ldots, n$. Etc.

Ici

$$i^{m-1} A_{11}^{1m} \qquad (i = s - \dot{s})$$

est hermitienne et se ramène à

$$(\rho + \dot{\rho})\, \Sigma_1^q x_1^j y_m^j.$$

Les $a_{k,k+1}^{jj}$ ont la forme particulière $x - \dot{x}$, et

$$\dot{a}_{1m}^{jj} = (-1)^{m-1} a_{1m}^{jj}.$$

Par des additions de transversales de multiplicateur λ [λ étant dans $C(s)$] accompagnées chacune de l'addition conjuguée par rapport à C, s, $\dot{s}$, on peut annuler d'abord les $a_{k,k+1}^{jj}$ situés hors de la transversale, puis les a_{kk}^{jj} également situés hors de la transversale : si $m = 2\mu - 1$, on est conduit à des équations de la forme $(\lambda - \dot{\lambda})y = x - \dot{x}$ avec $\dot{y} = y$ (vérifiée par $\lambda = y^{-1}x$) et $(\lambda + \dot{\lambda})y = z$ avec $\dot{y} = y$ et $\dot{z} = z$ $\Big($vérifiée par $\lambda = \frac{z}{2y}$ si C n'a pas le module 2 et par $\lambda = \frac{zs}{by}$ si C a le module 2$\Big)$; si $m = 2\mu$, on aura des équations de la forme $(\lambda + \dot{\lambda})y = x - \dot{x}$ avec $\dot{y} = -y$ (vérifiée par $\lambda = y^{-1}x$) et $(\lambda - \dot{\lambda})y = z$ avec $\dot{y} = -y$ et $\dot{z} = z$ $\Big($vérifiée par $\lambda = \frac{z}{2y}$ si C n'a pas le module 2 et par $\lambda = \frac{zs}{by}$ si C a le module 2$\Big)$. Les résultats sont les mêmes qu'au nº **16**, en donnant à e un sens convenable.

Supposons maintenant $b + 2$ non carré et $b - 2$ carré. Alors $\rho\dot{\rho} = -1$ et (10) s'écrit

$$\rho^{-1}a^1_{ji}(\rho^2) = -\dot{\rho}^{-1}a^1_{ij}(\dot{\rho}^2) - \dot{\rho}^{-1}a^1_{ij}(\dot{\rho}^2). \tag{14}$$

En reprenant toujours $\rho^{-1}a^1$ pour a avec les mêmes notations, les a^{ij}_{kl} gardent la même forme; $i^m A^{1m}_{11}$ est hermitienne et se ramène à la même forme que tout à l'heure; les $a^{ij}_{k.k+1}$ ont la forme $x + \dot{x}$, et $\dot{a}^{ij}_{1m} = (-1)^m a^{ij}_{1m}$. Les mêmes opérations peuvent encore s'effectuer et conduisent au même résultat.

Soit $h = \nu = 1$ et $\dot{f} = f = s \pm 1$.

Il n'y a plus alors de condition de réalité, et l'on rentre dans le cas du nº **15**, sauf que le nombre des types de A^{1m}_{11} dépend de $\mathfrak{S}$.

21. Supposons maintenant que $\mathfrak{S}$ résulte de l'adjonction à un champ C des racines υ, $\dot{\upsilon}$ d'une équation $\upsilon^2 - \zeta\upsilon + \eta = 0$ irréductible dans C, et *ajoutons l'hypothèse $\bar{a} = \dot{a}$, $\dot{a}$ étant la conjuguée de a relativement à* C, υ, $\dot{\upsilon}$ [on peut omettre l'hypothèse $\bar{a} = -\dot{a}$ qui se ramène à l'hypothèse $\bar{a} = \dot{a}$ en posant $a = (\upsilon - \dot{\upsilon})a'$].

Convenons encore de traiter les x_i et les y_i, dans les changements de variables, comme des variables conjuguées. On ne peut plus alors supposer qu'un même changement de variables permet de canoniser à la fois α et β, car, un changement de variables qui canonise α n'ayant pas, en général, ses coefficients dans $\mathfrak{S}$, on ne peut parler du changement conjugué. Supposons donc

$$\beta = \dot{\alpha}, \qquad \varphi_i(s) = f_i(s).$$

et posons

$$t_{l\rho} = \dot{s}_{l\rho}, \qquad \dot{t}_{l\rho} = s_{l\rho}$$

(si donc $\dot{\varphi}_l = f_l$, $\dot{s}_{l\rho} = s_{l\rho}$). La relation $\dot{\varphi}_{l'}(s) = g_l(s)$, qui montre ici que $\dot{c}_{l'} = c_l^{-1}$, donne, en changeant s en s^{-1} et en passant aux conjuguées,

$$g_{l'}(s) = \dot{\varphi}_l(s).$$

On a donc à la fois

$$t_{l'\rho} = s_{l\rho}^{-1} \qquad \text{et} \qquad t_{l\rho} = s_{l'\rho}^{-1}.$$

La condition $\bar{a} = \dot{a}$ donne alors, en observant que $x^{l'}_{j'k'}$ ne figure que dans $a_{l'}$,

$$\Sigma_\rho a^{l'\rho}_{j'j}(s_{l'\rho})\, s_{l'\rho}^{k'-k} = \Sigma_\rho \dot{a}^{l\rho}_{jj'}(\dot{s}_{l\rho})\, s_{l\rho}^{k'-k} \qquad (k, k' = 0, \ldots, \nu_l - 1),$$

d'où

$$a^{l'\rho}_{j'j}(s_{l'\rho}) = \dot{a}^{l\rho}_{jj'}(s_{l\rho}^{-1}),$$

ce qui détermine $a_{l'}$ par a_l, si $l' \neq l$.

Supposons donc $l' = l = 1$, et d'abord $\dot{f} \neq f$. Remarquons d'abord que $F = f\dot{f}$ *n'est réductible dans* C *que si* $\dot{f} = f$ (tout facteur de F irréductible dans C devant être égal à f ou à $\dot{f}$). Donc ici, en posant $s + \dot{s} = b$, b sera racine d'une équation de degré ν à coefficients dans C *irréductible dans* $\mathfrak{C}$. De plus $s + s^{-1} = b$, qui définit s relativement à $C(b) = C'$, ne sera pas résoluble dans C', sans quoi s serait racine d'une équation de degré ν à coefficients dans C. Mais $s + s^{-1} = b$, qui a une seule racine commune avec $f = 0$, est résoluble dans $C'(\upsilon) = C'(s)$. Donc υ *est hors de* C' (on voit que, *si* C' *est fini, ce cas ne peut se présenter que pour ν impair*), s est conjuguée de s relativement à C', υ, $\dot{\upsilon}$, et de même $a^1_{ji}(s)$ l'est de $a^1_{ij}(s)$. Donc *la matrice de* a^1, *exprimée par les variables* $z^1_1, \ldots, z^1_\tau, u^1_1, \ldots, u^1_\tau$ *sera hermitienne relativement à* C', υ, $\dot{\upsilon}$.

Soient maintenant $l' = l = 1$ et $\dot{f} = f$ avec $\nu = 2\nu'$ [si $\mathfrak{C}$ est fini, ce cas ne peut se présenter, car $C(s)$ contiendrait alors $C(\upsilon)$, puisque $\nu = 2\nu'$, et s vérifierait une équation de degré ν' à coefficients dans $C(\upsilon)$ contre l'hypothèse].

υ ne peut être dans $C(s)$, car $C(s)$ serait imprimitif (*E.*, 48), et

$f(s)$ serait par suite réductible dans $C(\upsilon)$. Soit toujours

$$s + s^{-1} = b$$

l'équation irréductible dans $C(b) = C'$ que vérifie s (si ε n'a pas le module 2, on peut supposer $\zeta = 0$; alors $-\eta$ est non carré dans C', sans quoi υ serait dans $C(s)$, et $b^2 - 4$ de même, $s + s^{-1} = b$ étant irréductible dans C'; si ε a le module 2 on peut supposer $\eta = 1$ (cf. *E.*, 32, 33). Soit

$$\omega = \omega(\upsilon, s)$$

une fonction rationnelle de υ, s telle que

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \dot{\omega} = \omega(\dot{\upsilon}, \dot{s}) = \omega_2(\upsilon, s),$$
$$\omega_3 = \omega(\upsilon, \dot{s}) = \omega_3(\upsilon, s), \qquad \omega_4 = \omega(\dot{\upsilon}, s) = \omega_4(\upsilon, s)$$

soient distincts. On aura

$$C'(\upsilon, s) = C'(\omega_i)$$

(*E.*, 47). D'ailleurs l'équation irréductible dans C' que vérifie ω est de degré 4, sans quoi elle serait de degré 2 [$C(\omega)$ contient s qui est de degré 2 relativement à C'] et, s étant alors primitif dans $C'(\omega)$ (*E.*, 48), υ serait dans $C(s)$.

Les quatre conjuguées d'une fonction

$$\varphi(\upsilon, s) = \Phi[\omega(\upsilon, s)]$$

sont évidemment

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega_1) &= \varphi(\upsilon, s) = \varphi_1,\\
\Phi(\omega_2) &= \varphi(\dot{\upsilon}, \dot{s}) = \varphi_2(\upsilon, s) = \varphi_2,\\
\Phi(\omega_3) &= \varphi(\upsilon, \dot{s}) = \varphi_3(\upsilon, s) = \varphi_3,\\
\Phi(\omega_4) &= \varphi(\dot{\upsilon}, s) = \varphi_4(\upsilon, s) = \varphi_4.
\end{aligned}$$

Si donc $\varphi(\upsilon, s) = \Phi(\omega)$ est une fonction symétrique de $\omega_1(\upsilon, s)$ et de $\omega_2(\upsilon, s) = \omega_1(\dot{\upsilon}, \dot{s})$, on a

$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = \varphi_4.$$

En particulier, la fonction

$$u(\omega) = \omega + \dot{\omega}$$

est racine d'une équation de degré $\leqq 2$ dans C', et de même $v(\omega) = \omega\dot{\omega}$. Comme d'ailleurs ω n'est pas dans $C'(u, v)$ (tout élément de ce champ, étant une fonction symétrique de ω, $\dot{\omega}$, annule un polynome du second degré irréductible dans C') et vérifie

$$\omega^2 - u\omega + v = 0,$$

il faut que u ou v soit de degré 2 (cf. *E.*, 47). Si donc U est un élément de degré 2 de $C'(u, v) = C'(U)$, $a^1_{ij}(s)$ et $a^1_{ji}(s) = \dot{a}^1_{ij}(\dot{s})$ sont conjugués et a^1 *est hermitienne relativement à* $C'(U)$, ω, $\dot{\omega}$.

On peut toujours prendre pour ω une fonction linéaire de υ, s (*E.*, 47). Mais il est plus simple ici de prendre $\omega = \upsilon s$, car l'égalité de deux des quatre valeurs

$$\upsilon s, \qquad \dot{\upsilon}\dot{s} = (\zeta - \upsilon)(b - s), \qquad \upsilon\dot{s} = \upsilon(b - s), \qquad \dot{\upsilon}s = (\zeta - \upsilon)s$$

constituerait une relation bilinéaire entre υ et s, et υ serait dans $C(s)$. On peut prendre $U = u$, et l'on a

$$u^2 + b\zeta u + \zeta^2 + \eta(b^2 - 4) = 0, \qquad \omega^2 - u\omega + \eta = 0.$$

On remarquera que toute substitution des z^1_i à coefficients dans

$$C'(\upsilon, s) = C'(\omega),$$

accompagnée des substitutions conjuguées par rapport à s seul (c'est-à-dire en laissant υ invariable et en remplaçant seulement s par les racines de f) opérées sur les $z^{1\rho}_i$, équivaut à une substitution des x^1_{ik} à coefficients dans $C(\upsilon)$, dont on obtient la conjuguée relativement à C, υ, $\dot{\upsilon}$ en remplaçant simplement υ par $\dot{\upsilon}$ (on le voit de suite en substituant une indéterminée à υ).

Si $l = l' = \nu = 1$ et $\dot{f} = f$, il n'y a plus de condition de réalité.

Pour la construction effective de $a^1_1 + a^1_h$, si $h > 1$, ou de a^1, si $h = 1$, les mêmes remarques générales sont à faire qu'au n° **19**. Après avoir déterminé la forme réduite de A^{1m}_{11} (en prenant $a^1_1 + a^1_h$ ou a^1 pour a et en revenant aux notations du n° **14**) dans $C(s)$, $C'(\upsilon)$ ou $C'(U)$ selon les cas, on opérera comme au n° **14**.

22. *Supposons maintenant que $\bar{a} = \alpha \dot{a}$ au lieu de $\bar{a} = \dot{a}$, les autres hypothèses restant les mêmes qu'au numéro précédent.* Posons

$$y_i = \dot{x}_i, \qquad y_{ik}^l = \dot{x}_{ik}^l, \qquad u_i^{l\rho} = \dot{z}_i^{l\rho} = \Sigma_k \dot{s}_{l\rho}^k x_{ik}^l,$$

et convenons que $z_{(j-1)}^{l\rho}$ désignera o ou $z_{j-1}^{l\rho}$ selon que $z_j^{l\rho}$ est ou n'est pas la première variable d'une suite. Alors

$$\alpha_l \dot{a}_l = \Sigma_{\rho j j'} s_{l'\rho} \dot{a}_{jj'}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho})\, \dot{z}_j^{l\rho}\left(z_{j'}^{l'\rho} + z_{(j'-1)}^{l'\rho}\right),$$

et l'identification des coefficients de $x_{jk}^l x_{j'k'}^{l'}$ dans $\bar{a}$ et $\alpha \dot{a}$ donne

$$\Sigma_\rho a_{jj'}^{l'\rho}(s_{l'\rho}) s_{l'\rho}^{k'-k} = \Sigma_\rho s_{l'\rho}\left[\dot{a}_{jj'}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho}) + \dot{a}_{j,(j'+1)}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho})\right] s_{l'\rho}^{k'-k},$$

$a_{j,(j'+1)}^{l\rho}$ désignant, comme au n° **20**, o ou $a_{j,j'+1}^{l\rho}$ selon que $u_{j'}^{l'\rho} = \dot{z}_{j'}^{l'\rho}$ est ou n'est pas la dernière variable d'une suite, d'où

$$a_{jj'}^{l'\rho}(s_{l'\rho}) = s_{l'\rho}\left[\dot{a}_{jj'}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho}) + \dot{a}_{j,(j'+1)}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho})\right]. \tag{15}$$

Si $l' \neq l$, cela détermine encore $a_{l'}$ par a_l.

Soit $l' = l = 1$, et d'abord $\dot{f} \neq f$.

D'après le n° **21**, υ est hors de $C(b) = C'$; $C'(\upsilon) = C'(s)$, et $s^{-1} = \dot{s}$ est conjuguée de s relativement à C', υ, $\dot{\upsilon}$.

Si $b+2$ est carré ou si $b+2$ et $b-2$ sont non carrés, on peut regarder $\rho^{-1} = \dot{\rho}$ comme conjuguée de ρ relativement à C', υ, $\dot{\upsilon}$, et (15) s'écrit

$$\rho^{-1} a_{ji}^1(\rho^2) = \dot{\rho}^{-1} \dot{a}_{ij}^1(\dot{\rho}^2) + \dot{\rho}^{-1} \dot{a}_{i,(j+1)}^1(\dot{\rho}^2). \tag{16}$$

Pour former $\rho^{-1} a^1$, que je prendrai pour a avec les notations du n° **16**, on peut opérer comme au même n° **16** (dans le cas $s\dot{s} = 1$) avec les modifications suivantes. Désignons par x, y, z des éléments de la forme $\rho^{-1}\xi$, ξ étant dans $C'(s)$ (les a_{kl}^{ij} sont tous de cette forme), et étendons, comme au n° **20**, la définition d'une forme hermitienne (C étant seulement remplacé par C').

$$i^{m-1} A_{11}^{1m} \qquad (i = s - \dot{s})$$

est encore hermitienne et se réduit à

$$(\rho + \dot{\rho}) \Sigma_1^q x_1^j y_m^j.$$

Les $a^{jj}_{k,k+1}$ ont la forme particulière $x - \dot{x}$, et

$$\dot{a}^{jj}_{1m} = (-1)^{m-1} a^{jj}_{1m}.$$

En opérant comme au n° **20** (C étant toujours remplacé par C'), on arrive encore aux résultats du n° **16**, en donnant à e un sens convenable.

Si $b+2$ est non carré et $b-2$ carré, $\rho\dot{\rho} = -1$, (15) s'écrit

$$(17) \qquad \rho^{-1} a^1_{ji}(\rho^2) = -\dot{\rho}^{-1} \dot{a}^1_{ij}(\dot{\rho}^2) - \dot{\rho}^{-1} \dot{a}^1_{ij}(\dot{\rho}^2),$$

et l'on opérera comme après (14).

Soit $l' = l = 1$ et $\dot{f} = f$ avec $\nu' = 2\nu$ (ce cas ne se présente pas si $\mathfrak{C}$ est fini). Pour que ρ soit dans $C'(s)$ il faut et suffit, on l'a vu, que $b+2$ ou $b-2$ soit carré. Donc, pour qu'il soit dans $C'(\upsilon, s)$ hors de $C'(s)$ *il faut que $b+2$ et $b-2$ soient non carrés*. Cherchons les conditions suffisantes. Soit

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \upsilon$$

($\rho_i = \rho'_i + \rho''_i s$, ρ'_i et ρ''_i étant dans C' et $\rho_1 \neq 0$). On aura

$$\rho^2 = s = \rho_0^2 - \rho_1^2 \eta + \upsilon\rho_1(\zeta\rho_1 + 2\rho_0), \qquad \text{donc} \qquad \zeta\rho_1 + 2\rho_0 = 0.$$

Si donc C a le module 2, on arrive à une impossibilité, puisque alors $\zeta \neq 0$. Supposons que C n'ait pas le module 2. On aura, en posant $\frac{\zeta^2}{4} - \eta = \delta$ (non carré),

$$\rho_0 = -\frac{\zeta\rho_1}{2}, \qquad s = \delta\rho_1^2 = \delta[\rho_1'^2 - \rho_1''^2 + s\rho''_1(b\rho''_1 + 2\rho'_1)],$$

donc

$$\rho''_1 = \theta\rho'_1 \quad (\theta = \pm 1), \qquad \rho_1 = \rho'_1(1+\theta s), \qquad \delta\rho_1'^2(b + 2\theta) = 1.$$

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour que ρ soit dans $C'(\upsilon, s)$ hors de $C'(s)$ est que $\delta(b+2)$ ou $\delta(b-2)$ soit carré, C n'ayant pas le module 2.*

Si

$$\delta\rho_1'^2(b + 2\theta) = 1,$$

C n'ayant pas le module 2, on a

$$\rho = \rho'_1(1+\theta s)\left(\upsilon - \frac{\zeta}{2}\right), \qquad \rho\dot{\rho} = -\theta.$$

Supposons que $b+2$ et $b-2$ soient non carrés (donc C n'a pas le module 2) et que $\delta(b+2)$ et $\delta(b-2)$ soient également non carrés. Alors ρ n'est pas dans $C'(\upsilon, s)$, et l'on peut convenir que la conjuguée $\dot{\rho}$ de ρ est la racine carrée de $\dot{s}$ qui est égale à ρ^{-1}.

Pour préciser, on peut d'ailleurs observer que ρ et $\dot{\rho} = \rho^{-1}$ sont les racines de

$$\rho^2 - \varphi\rho + 1 = 0 \qquad (\varphi^2 = b+2),$$

et que $u (= \upsilon s + \dot{\upsilon}\dot{s})$ n'est pas dans $C'(\varphi) = C'_1$. Si en effet une racine v d'une équation $v^2 = cv - d$, irréductible dans C', est dans C'_1, c'est-à-dire si φ est de la forme $\varphi_0 + \varphi_1 v$ (φ_0 et φ_1 étant dans C' et $\varphi_1 \neq 0$), l'équation $\varphi^2 = b+2$ donne

$$\varphi_1 = \frac{-2\varphi_0}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi_0^2}{c^2}(c^2 - 4d) = b+2,$$

et cela est impossible dans les trois cas $v = s$, $v = \upsilon$, $v = u$ [si $v = u$, $c^2 - 4d = \delta(b^2 - 4)$]. Partons alors de $C'_1(u) = C''$ [je supposerai toujours que $\omega = \upsilon s$ et que $u = \omega + \dot{\omega} = \upsilon s + (b - s)(\zeta - \upsilon)$] comme au numéro précédent de C', et, en faisant jouer à ρ, ω les rôles respectifs de s, υ, adjoignons $\omega' = \rho\omega$. On remarquera d'abord que ω' n'est pas dans $C''(\rho)$, car si υs était de la forme $\omega_0 + \omega_1\rho$, ω_0 et ω_1 étant dans C'', ρ serait dans $C'(\upsilon, s)$ contre l'hypothèse. Les quatre valeurs

$$\omega'_1 = \rho\omega, \qquad \omega'_2 = \rho\dot{\omega} = (\varphi - \rho)(u - \omega),$$
$$\omega'_3 = \dot{\rho}\omega = (\varphi - \rho)\omega, \qquad \omega'_4 = \dot{\rho}\dot{\omega} = \rho(u - \omega)$$

sont distinctes, puisque ω est hors de $C''(\rho)$; donc

$$C''(\omega') = C''(\rho, \omega),$$

et l'équation irréductible dans C'' que vérifie ω' est de degré 4, sans quoi elle serait de degré 2 [$C''(\omega')$ contient ρ] et, ρ étant alors primitif dans $C''(\omega')$, ω serait dans $C''(\rho)$. En posant alors

$$u' = \rho\omega + \dot{\rho}\dot{\omega},$$

on aura

$$u'^2 + \varphi u u' + u^2 + \eta(\varphi^2 - 4) = 0, \qquad \omega'^2 - u'\omega + \eta = 0.$$

Relativement à $C''(u')$, la conjuguée d'une fonction rationnelle $\Phi(\rho, \omega)$ à coefficients dans $C''(u')$ est $\Phi(\dot\rho, \dot\omega)$: si par exemple $\Phi(\rho, \omega)$ est une fonction rationnelle $\Psi(\rho, \upsilon)$ à coefficients dans C',

$$\Phi(\dot\rho, \dot\omega) = \Psi(\dot\rho, \dot\upsilon).$$

Si donc $b + 2$ est carré (ce qui a toujours lieu si C a le module 2) ou si $\delta(b - 2)$ est carré, ou si $b + 2$, $b - 2$, $\delta(b + 2)$, $\delta(b - 2)$ sont non carrés, on a

$$\rho\dot\rho = 1,$$

(15) s'écrit sous la forme (16), et l'on peut opérer comme tout à l'heure après l'équation (16) [$C'(s)$ étant remplacé par $C'(\upsilon, s)$].

Si $b + 2$ et $\delta(b - 2)$ sont non carrés (alors C n'a pas le module 2), et si $\delta(b + 2)$ ou $\delta(b - 2)$ est carré, on a

$$\rho\dot\rho = -1,$$

(15) s'écrit sous la forme (17), et l'on peut opérer comme tout à l'heure après l'équation (17) [$C'(s)$ étant toujours remplacé par $C'(\upsilon, s)$].

Si $l' = l = \nu = 1$ et $\dot f = f = s \pm 1$, il n'y a plus de condition de réalité, et, après avoir déterminé les formes réduites de $A_{11}^{1m'}$ (en prenant a' pour a et les notations du n° **16**) dans $\mathfrak{S}$, on opérera comme au n° **16**.

25. *Supposons que $\mathfrak{S}$ soit le champ des nombres réels et que $\bar{a} = a$.* Alors ν est $\leqq 2$.

Soit d'abord $h > 1$ et $\nu = 1$. s est réel $\neq \pm 1$, et $\mathfrak{S}(s) = \mathfrak{S}$. $a_1 + a_h$ est symétrique réelle. Prenons-la sous la forme réduite obtenue au n° **14** pour $s^2 \neq 1$, et opérons la substitution qui consiste à prendre, dans $A^{2i-1,2i}$, le coefficient de x_k^{2i-1} $(k = 1, \ldots, m_{2i})$ pour $y_{m_{2i}-k+1}^{2i}$ (donc, dans $A^{2i,2i-1}$, celui de y_k^{2i-1} pour $x_{m_{2i}-k+1}^{2i}$) (*cf.* **17**). La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{2i-1,2i} \\ A^{2i,2i-1} & 0 \end{pmatrix}$$

sera alors réduite à sa transversale principale, et, en observant que xy se transforme par la substitution

$$(x, y; x+y, x-y)$$

en x^2-y^2, on voit que sa *caractéristique* [en l'assimilant à une forme quadratique (¹)] est m_{2i}.

Soit $h>1$, $\nu=2$. s est imaginaire et $|s|>1$ (sans quoi h serait égal à 1). $\mathfrak{C}(s)$ est le champ des nombres réels et complexes.

$$a_1 = a_1^1 + a_1^2$$

est hermitienne dans les variables

$$z_i^1, \quad u_j^{h1}, \quad z_i^2 = \bar{z}_i^1, \quad u_j^{h2} = \bar{u}_j^{h1},$$

et sa caractéristique (calculée au n° **15** pour $s\bar{s} \neq 1$) est doublée lorsqu'on passe aux variables réelles.

Soit $h=\nu=1$, *donc* $s=\pm 1$.

Réduisons a_1 comme au n° **14**, en observant seulement que, par des substitutions de $\mathfrak{C}$, on pourra ramener A_{11}^{1m} toujours et seulement à une forme de même caractéristique. e_0 étant une valeur positive arbitraire et η l'indice d'inertie de A_{11}^{1m}, je supposerai a_{1m}^{jj} égal à e_0 pour $j \leq \eta$, à $-e_0$ pour $j>\eta$. Sur la forme réduite ainsi obtenue opérons la substitution qui consiste à prendre, dans A^{jj}, le coefficient de x_k^j $\left[k=1,\ldots,\mathrm{E}\left(\frac{m_j}{2}\right)\right]$ pour $y^j_{m_j-k+1}$ (donc celui de y_k^j pour $x^j_{m_j-k+1}$). On voit alors comme tout à l'heure que la caractéristique de A^{jj} est $\mathrm{E}\left(\frac{m_j}{2}\right)$.

Des observations précédentes il résulte immédiatement que, *c étant la caractéristique de a, on a*

$$c = \frac{1}{2}\Sigma m' + 2\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{m''}{2}\right) + \Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{m'''}{2}\right), \tag{18}$$

(¹) Si une forme quadratique a réelle, à n variables, est réductible (par transformations linéaires réelles) à la forme

$$\Sigma_1^h x_i^2 - \Sigma_{h+1}^r x_i^2 \qquad (r \leq n),$$

M. Lœwy appelle *caractéristique* de a le plus petit des deux nombres h, $r-h$ (*N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, 1898).

m', m'', m''' parcourant les exposants des diviseurs élémentaires de $\alpha - s\varepsilon$ relatifs aux racines de module $\neq 1$ (réelles ou non), aux racines imaginaires de module 1, aux racines ± 1 respectivement. [D'ailleurs (18) n'est que la formule (7) appliquée à la forme hermitienne de même matrice que a et à des substitutions α, β réelles.]

Si l'on se donne c et une substitution n-aire vérifiant (18) (*outre les conditions déjà rencontrées*), *la méthode précédente fournit directement, conjointement à la forme canonique α de cette substitution et à la substitution corrélative β, une forme quadratique réduite a, de déterminant $\neq 0$, réelle dans les variables données et de caractéristique c, telle que $\beta a \bar{\alpha} = a$. On le voit comme au* n° **17** (¹).

24. *Supposons maintenant $\mathfrak{S}$ fini d'ordre p^κ* (p premier). On peut alors se proposer de compter toutes les formes réduites de a ainsi que toutes les formes équivalentes (par changement de variables) à chaque forme réduite de a.

Prenons les notations du n° **14** dont la forme a désignera la forme $a_1^1 + a_h^1$ si $h > 1$, la forme a_1 si $h = 1$, la forme nommée primitivement a vérifiant $\bar{a} = \pm a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$, la forme $\rho^{-1} a_1$ si $h = 1$, la forme primitive a vérifiant $\bar{a} = \alpha a$ ou $\bar{a} = \alpha \dot{a}$ (en supposant, ce qui est permis, que les z_j^1, z_j^{h1}, u_j^1, u_j^{h1} si $h > 1$, et les variables $z_j^1, \ldots, z_j^\nu$, $u_j^1, \ldots, u_j^\nu$ si $h = 1$, soient les variables x_j^k, y_j^k de la forme réduite). Il s'agira d'abord de déterminer dans chaque cas les types réduits distincts de A_{11}^{1m} (en partant de chacun d'eux on obtient un seul type réduit de a), puis le nombre M_{mq} des formes équivalentes à chacun de ces types réduits de A_{11}^{1m} : le nombre $\mathfrak{N}(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}, \ldots)$ des formes équivalentes à chaque type réduit de a est donné par la formule

$$(19) \qquad \mathfrak{N}(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots) = M_{mq}\,\pi^{N_1}\,\mathfrak{N}(Q_2, m_{Q_2}; \ldots),$$

où N_1 est donné par (5) si $h > 1$, et par (6) si $h = 1$.

Soit d'abord $h > 1$. A_{11}^{1m} peut toujours se réduire à la forme

$$\Sigma_1^q (x_1^{2j-1} y_m^{2j} + c x_1^{2j} y_m^{2j-1}),$$

(¹) *Cf.* Loewy, *loc. cit.*

c étant égal à $(-1)^{m-1}$ si $\bar{a} = a$ et si $\bar{a} = \dot{a}$, à $(-1)^m$ si $\bar{a} = -\dot{a}$, à $(-1)^{m-1}s^{-1}$ si $\bar{a} = \alpha a$, à $(-1)^{m-1}\dot{s}^{-1}$ si $\bar{a} = \alpha\dot{a}$. Les x_1^{2j-1} sont ici cogrédients aux y_m^{2j-1} et les x_1^{2j} aux y_m^{2j}. Donc la transformée de A_{11}^{1m} par une substitution linéaire est entièrement déterminée par celle de

$$\Sigma_1^q x_1^{2j-1} y_m^{2j}$$

dont toutes les transformées s'obtiennent en faisant subir aux x_1^{2j-1} seuls toutes les substitutions possibles, puisque les substitutions que subissent les x_1^{2j-1} et les y_m^{2j} sont indépendantes. En désignant par $L(n, p^\lambda)$ le groupe des substitutions n-aires à coefficients dans le champ d'ordre p^λ, on voit que M_{mq} est ici l'ordre de $L(q, \pi^\nu)$.

Soit $h = 1$, $\nu = 2\nu'$. A_{11}^{1m} se réduit alors, à un facteur près, à $\Sigma_1^q x_1^j y_m^j$, y_m^j étant cogrédient à $\dot{x}_1^j$: le sens du symbole $\dot{x}$ relativement à x variant ici suivant les cas, d'après ce qui a été dit précédemment. En appelant Γ le champ des quantités de la forme $x + \dot{x}$, il est clair que M_{mq} est l'indice dans $L(q, \pi^\nu)$ du groupe des substitutions à coefficients dans Γ qui laissent $\Sigma_1^q x_1^j \dot{x}_1^j$ inaltérée, ou, plus brièvement, du groupe de cette forme dans Γ. L'ordre de ce groupe est

$$\pi^{\frac{q(q-1)}{2}} \Pi_1^q [\pi^i - (-1)^i] \quad (^1).$$

Dans tous les cas suivants, M_{mq} étant de même l'indice dans $L(q, \pi^\nu)$ du groupe de chaque forme réduite de A_{11}^{1m} (dans un champ analogue à Γ), je me bornerai à indiquer ces formes réduites dont les groupes sont connus.

Soit $h = \nu = 1$ *et d'abord* $\bar{a} = \pm a$ *avec* $p > 2$. *Si* m *est pair avec* $\bar{a} = a$, *ou impair avec* $\bar{a} = -a$, A_{11}^{1m} se ramène à la forme

$$\mathfrak{F} = \Sigma_1^{q'} (x_1^{2j-1} y_m^{2j} - x_1^{2j} y_m^{2j-1}) \qquad (q = 2q').$$

Si m *est impair avec* $\bar{a} = a$, *ou pair avec* $\bar{a} = -a$, A_{11}^{1m} se ramène à

$$F_c = \Sigma_1^{q-1} x_1^j y_m^j + c x_1^q y_m^q$$

($c = 1$ ou N, N étant un non-carré quelconque).

---

(1) *Voir* DICKSON, *M. A.*, t. LII, p. 561-581 (1899); *Linear Groups*, p. 134 (1901); JORDAN, *J. M.*, 1905, p. 247.

Toute substitution permutable à α étant le produit $\xi\gamma$ d'une substitution ξ du groupe des sous-séries par une substitution γ du groupe des additions, et les substitutions ξ fournissant évidemment à elles seules les mêmes transformées de A_{11}^{1m} que les substitutions $\xi\gamma$, aucun changement de variables laissant α inaltérée (α étant donnée, on ne peut en employer d'autres) ne peut transformer l'un dans l'autre les types réduits obtenus pour a. *Donc, si $h\nu > 1$, il y a pour a un seul type réduit; si $h = \nu = 1$ il y en a 2^ι distincts, ι étant le nombre des m_i impairs.*

Lorsque $\bar{a} = a$ avec $p > 2$ et $h\nu \geqq 1$, on peut assimiler a à une forme quadratique et chercher quelle est sa classe. Cela revient au calcul du déterminant de a relativement à x_{ik}^l, y_{ik}^l (aux facteurs carrés près) : ce calcul sera fait au numéro suivant.

Soient toujours $h = \nu = 1$ et $\bar{a} = \pm a$, mais avec $p = 2$. A_{11}^{1m} se ramène [1], si $q = 2q' + 1$, au type

$$\Phi_1 = x_1^1 y_m^1 + \Sigma_1^{q'}(x_1^{2i} y_m^{2i+1} + x_1^{2i+1} y_m^{2i}),$$

et, si $q = 2q'$, à l'un des deux types distincts

$$\Phi_0 = \Sigma_1^{q'}(x_i^{2i-1} y_m^{2i} + x_1^{2i} y_m^{2i-1}), \quad \Phi_2 = x_1^1 y_m^1 + x_1^2 y_m^2 + \Sigma_2^{q'}(x_1^{2i-1} y_m^{2i} + x_1^{2i} y_m^{2i-1}).$$

Si m est impair $= 2\mu - 1$ et > 1, $a_{\mu\mu}^{jj}$ est nul, d'après (1) et (2), en sorte que $q = 2q'$ ($|A_{11}^{1m}|$ est $\neq 0$) et que A_{11}^{1m} se ramène à Φ_0. *Si $m = 1$ ou si m est pair,* A_{11}^{1m} se ramène à Φ_1 pour $q = 2q' + 1$, à Φ_0 ou à Φ_2 pour $q = 2q'$.

Le nombre des types réduits auxquels on peut ramener a (par des substitutions permutables à α) est donc 1 *si $h\nu > 1$, et, si $h = \nu = 1$, 2^ι, ι étant le nombre des sous-séries contenant un nombre pair de suites formées elles-mêmes d'un nombre de variables pair ou égal à* 1.

En revenant aux variables x_{ik}^l, y_{ik}^l, on voit directement, d'après (8) et (9), que la diagonale de a_1 est toujours nulle sauf si $h = \nu = m = 1$; c'est donc seulement alors que, pour $q = 2q'$, a_1 peut être de la seconde classe (c'est-à-dire du type analogue à Φ_2).

---

[1] *Voir* JORDAN, *J. M.*, 1905, p. 268-269.

Soit $h=\nu=1$ avec $\bar{a}=\alpha a$ et d'abord $p>2$. Si $s=t=1$ avec m pair, ou si $s=t=-1$ avec m impair, A_{11}^{1m} se ramène à $\mathfrak{F}$. *Si $s=t=1$ avec m impair, ou si $s=t=-1$ avec m pair,* A_{11}^{1m} se ramène à F_c.

Soit $p=2$. Si $s=t=1\,(=\pm 1)$ avec m pair, A_{11}^{1m} se ramène à $\mathfrak{F}$. *Si $s=t=1$ avec m impair,* A_{11}^{1m} se ramène à Φ_1 pour $q=2q'+1$, à Φ_0 ou à Φ_2 pour $q=2q'$.

Donc, si $h\nu>1$, il y a, pour $p\geq 2$, un seul type réduit. Si $h=\nu=1$ et $p>2$, il y en a 2^ι, ι étant le nombre des m_i impairs pour $s=t=1$, le nombre des m_i pairs pour $s=t=-1$. Si $h=\nu=1$ et $p=2$, il y en a 2^ι, ι étant le nombre des sous-séries contenant un nombre pair de suites formées elles-mêmes d'un nombre impair de variables.

Soit $h=\nu=1$ avec $\bar{a}=\dot{a}$ ou $\bar{a}=\alpha\dot{a}$.

A_{11}^{1m} se ramène alors à

$$i^{1-m}\Sigma_1^q x_1^j y_m^j \qquad (i=\upsilon-\dot{\upsilon}),$$

les y_m^j étant cogrédients aux $\dot{x}_1^j$ ($\dot{x}$ désignant la conjuguée de x relativement à C', υ, $\dot{\upsilon}$).

25 (¹). Pour déterminer la classe de a lorsque $\bar{a}=a$ et $p>2$, il reste à calculer, aux facteurs carrés près, le déterminant D (relativement aux x_{jk}^l, y_{jk}^l) de a_1+a_h, si $h>1$, ou de a_1, si $h=1$.

Si $h>1$, le déterminant de

$$\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$$

(avec les notations du numéro précédent) est $(-1)^m$, comme on le voit de suite en échangeant les lignes équidistantes des extrêmes. On a donc, relativement aux variables z_j^1, u_j^{h1},

$$|a_1^1+a_1^h|=(-1)^\tau, \qquad |a_1+a_h|=(-1)^{\tau\nu}.$$

Lorsqu'on prend les variables x_{jk}^l, y_{jk}^l, ce déterminant est multiplié

(¹) *Cf.* JORDAN, *J. M.*, 1905.

par $(\Delta\dot{\Delta})^{2\tau}$, Δ étant le déterminant d'ordre ν dont la $\rho^{\text{ième}}$ ligne est 1, s_ρ, s_ρ^2, $\ldots$, $s_\rho^{\nu-1}$, et $\dot{\Delta}$ étant formé avec les $s_{h\rho} = s_\rho^{-1}$ comme Δ avec les s_ρ. Δ^2, produit des $(s_\rho - s_{\rho'})^2$, est dans $\mathfrak{S}$ et est non carré (sa racine Δ, fonction non symétrique des s^{π^j}, est hors de $\mathfrak{S}$); de même $\dot{\Delta}^2$. Donc $(\Delta\dot{\Delta})^2$ est carré, et $D = (-1)^{\tau\nu}$ à un facteur carré près.

Si $h = 1$ avec $\nu = 2\nu'$, $|A^{11}|$ (avec les notations du numéro précédent) est égal à

$$(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} i^{m(1-m)} = (-i^2)^{\frac{m(1-m)}{2}} \qquad (i = s - s^{-1}).$$

On a donc, relativement aux z_j^1, u_j^{h1},

$$\Pi_1^\nu |a_\rho| = \Pi_1^\nu i_\rho^{2M} \qquad \left[i_\rho = s_\rho - s_\rho^{-1},\ M = \Sigma \frac{m_k(1-m_k)}{2}\right]$$

ou

$$\Pi_1^\nu |a_\rho| = \Pi_1^{\nu'} i_\rho^{4M}.$$

Donc

$$\Pi_1^\nu |a_\rho| = 1$$

à un facteur carré près. On voit d'ailleurs, en rangeant les z dans l'ordre $z_1^1, \ldots, z_\tau^1, z_1^2, \ldots, z_\tau^2, \ldots, z_1^\nu, \ldots, z_\tau^\nu$ et en faisant passer les $\tau\nu'$ dernières colonnes de a_1 avant les $\tau\nu'$ premières (a^ρ contient, avec $z_1^\rho, \ldots, z_\tau^\rho$, les variables $u_1^{\nu'+\rho}, \ldots, u_\tau^{\nu'+\rho}$ et non les variables correspondantes $u_1^\rho, \ldots, u_\tau^\rho$), que

$$|a_1| = (-1)^{\tau\nu'} \Pi_1^\nu |a^\rho|.$$

En passant aux x_{jk}^l, y_{jk}^l, Δ ayant le même sens que tout à l'heure, on a donc, à un facteur carré près,

$$D = \Delta^{2\tau}(-1)^{\tau\nu'},$$

Δ^2 étant non carré.

Soit $h = \nu = 1$.

On voit d'abord, avec les notations du numéro précédent, que, si m est pair, le déterminant de

$$\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{11} \end{pmatrix}$$

est égal à 1, et que, si m est impair,

$$|A^{jj}| = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \quad (j < q), \qquad |A^{qq}| = c^m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

Donc, en désignant par d_r l'unité si m_{ϱ_r} est pair, et la quantité analogue à $(-1)^{\frac{m(m-1)q}{2}} c^m$, relative à $\mathfrak{A}_{rr}$, si m_{ϱ_r} est impair, il est clair que

$$D = \Pi d_r.$$

26. Quand $\mathfrak{S}$ a le module 2, on peut se poser un problème voisin du précédent, celui de trouver toutes les formes quadratiques $a = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ telles que la substitution α conserve a. On ne peut plus ici assimiler a à une matrice ([1]). Mais on peut opérer comme au n° **19** jusqu'à la détermination de a^1 exclusivement, sauf que u'^{ρ}_j doit être remplacé par z'^{ρ}_j, et que, pour $h > 1$, a^{ρ}_h se confond par définition avec a^{ρ}_1, et, pour $h = 1$, $\nu = 2\nu'$, $a^{\nu'+\rho}_1$ avec a^{ρ}_1.

Si h est > 1 ou si $h = 1$ avec $\nu > 1$, il est clair que a^1, qui est encore bilinéaire, se détermine comme au n° **19**.

Soit donc $h = \nu = 1$.

Désignons ici par a, en revenant aux notations du n° **5**, la forme

$$\Sigma a^{ij}_{kl} x^i_k x^j_l,$$

hermitienne relativement à $\mathfrak{S}$ et aux racines υ, $\dot{\upsilon}$ d'une équation

$$\upsilon^2 = \zeta\upsilon + 1$$

irréductible dans $\mathfrak{S}$ ([2]) (donc $\zeta \neq 0$), dont on déduit a^1 en remplaçant

---

([1]) *Cf.*, pour ce qui suit, JORDAN, *J. M.*, 1905; DICKSON, *Transactions of the Am. Math. Soc.*, 1906, p. 285-292.

([2]) Si $\mathfrak{S}$ est fini, on peut prendre ζ dans $\mathfrak{S}$ (*E.*, 33). Si $\mathfrak{S}$ est infini il suffit de faire jouer le rôle de $\mathfrak{S}$ au champ $\mathfrak{S}(\zeta)$, ζ étant une indéterminée. En effet, si

$$x^2 + \zeta x + 1 = 0$$

avait une racine de la forme $\frac{u}{v}$ où

$$u = \Sigma u_i \zeta^i, \qquad v = \Sigma v_i \zeta^i \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

les u_i, v_i étant dans $\mathfrak{S}$ (cf. *E.*, 46) et α_0, β_0 n'étant pas tous deux nuls, l'annulation des coefficients de ζ^0 et de ζ^1 dans $u^2 + \zeta uv + v^2$ donnerait

$$u_0^2 + v_0^2 = 0 \qquad (\text{ou } u_0^2 = v_0^2, \text{ d'où } u_0 = v_0) \qquad \text{et} \qquad u_0^2 = 0.$$

On remarquera que, si $\mathfrak{S}$ est fini d'ordre 2, ζ est égal à 1 et qu'alors les deux

x_l^j par x_l^j. Je poserai

$$a_{kl}^{ij} = c_{kl}^{ij} + d_{kl}^{ij}\upsilon,$$

si a_{kl}^{ij} est au-dessus de la diagonale de a ou sur cette diagonale, et

$$a_{kl}^{ij} = c_{kl}^{ij} + d_{kl}^{ij}\dot{\upsilon} \qquad (c_{kl}^{ij} = c_{lk}^{ji},\ d_{kl}^{ij} = d_{lk}^{ji},\ d_{kk}^{ii} = 0)$$

s'il est au-dessous, les c et les d étant dans $\mathfrak{S}$ (j'appellerai désormais les éléments de $\mathfrak{S}$ *réels*). Il est clair que, si l'on ne considère comme ici que a^1, c_{kl}^{ij} peut être négligé sauf si $i=j$ avec $k=l$, et que l'échange de υ, $\dot{\upsilon}$ revient à augmenter c_{kl}^{ij} de $d_{kl}^{ij}\zeta$. Je poserai encore

$$a^1 = b = \Sigma b_{kl}^{ij} x_k^i x_l^j$$

$(b_{kl}^{ij} = a_{kl}^{ij} + a_{lk}^{ji}$ sauf si $i=j$ avec $k=l$; $b_{kk}^{ii} = a_{kk}^{ii})$;

$$\mathrm{B}^{ij} = \Sigma_{kl} b_{kl}^{ij} x_k^i x_l^j \qquad (k = 1, \ldots, m_i;\ l = 1, \ldots, m_j);$$

$$\mathrm{B}_{\rho\sigma}^{kl} = \Sigma_{ij}\, b_{kl}^{ij} x_k^i x_l^j,$$

i parcourant les nombres

$$\mathrm{Q}_{\rho-1}+1, \quad \ldots, \quad \mathrm{Q}_\rho,$$

et j les nombres

$$\mathrm{Q}_{\sigma-1}+1, \quad \ldots, \quad \mathrm{Q}_\sigma \qquad (k \equiv m_{\mathrm{Q}_\rho},\ l \equiv m_{\mathrm{Q}_\sigma});$$

$$\mathfrak{B}_{\rho\sigma} = \Sigma_{kl} \mathrm{B}_{\rho\sigma}^{kl} \qquad (k = 1, \ldots, m_{\mathrm{Q}_\rho};\ l = 1, \ldots, m_{\mathrm{Q}_\sigma}).$$

J'entendrai enfin par *discriminant d'une forme hermitienne*

$$\varphi = \Sigma \varphi_{ik} x_i x_k$$

le déterminant $|\varphi|'$ qui se déduit de $|\varphi| = |\varphi_{ik}|$ en y remplaçant φ_{ii} par 0 et φ_{ik} par $\varphi_{ik} + \varphi_{ki}$; si $\varpi = \Sigma \varpi_{ik} x_i x_k$ est une forme quadratique à coefficients dans $\mathfrak{S}$, $|\varpi|$ désignera son discriminant, c'est-à-dire le déterminant de ses dérivées secondes : ainsi

$$|b| = |a|'.$$

---

types canoniques d'une forme quadratique $b = \Sigma b_{ik} x_i x_k$ (*E.*, 45) se distinguent, lorsqu'on l'assimile à la forme hermitienne

$a = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ ($a_{ii} = b_{ii}$, $a_{ik} = c_{ik} + b_{ik}\upsilon$, $a_{ki} = \dot{a}_{ik}$, les c_{ik} restant indéterminés)

par ce fait que $|a|$ est nul pour l'un et non pour l'autre.

Il est clair que, si v est dans $\mathfrak{S}$ et si $\varphi = (\varphi_{ik})$ est une substitution réelle des x_i, $\dot{\varphi} v \bar{\varphi} = \varphi v \varphi$ donne, en y remplaçant $\dot{x}_i$ par x_i, le même résultat que la substitution φ dans $\Sigma v_{ik} x_i x_k$.

Formons la condition pour que l'accroissement de b, quand on opère sur les x_i la substitution α, soit nul. En général, le terme en $x^i_{k-1} x^j_{l-1}$ de cet accroissement figurera dans les seuls accroissements de $b^{ij}_{kl} x^i_k x^j_l$ de $b^{ij}_{k,l-1} x^i_k x^j_{l-1}$ et de $b^{ij}_{k-1,l} x^i_{k-1} x^j_l$, et l'on aura

$$(20) \quad b^{ij}_{k,l-1} + b^{ij}_{k-1,l} + b^{ij}_{kl} = 0 \qquad (k = 2, \ldots m_i + 1;\ l = 2, \ldots, m_j + 1),$$

d'où

$$(21) \quad d^{ij}_{k,l-1} + d^{ij}_{k-1,l} + d^{ij}_{kl} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, m_i + 1;\ l = 2, \ldots, m_j + 1),$$

en regardant b^{ij}_{kl} et d^{ij}_{kl} comme nuls pour $k > m_i$ ou $l > m_j$. Mais il y a trois exceptions exactement : pour $j = 1$, $l = k$, les deux termes $b^{ij}_{k,l-1} x^i_k x^j_{l-1}$, $b^{ij}_{k-1,l} x^i_{k-1} x^j_l$ ne sont pas distincts; pour $j = i$, $l = k + 1$, l'accroissement du premier n'a pas de terme en $x^i_{k-1} x^i_k$; pour $j = i$, $l = k - 1$, l'accroissement du second n'a pas de terme en $x^i_{k-1} x^i_{k-2}$. Ces trois cas exceptionnels donnent respectivement

$$b^{ii}_{kk} = b^{ii}_{k,k-1} \quad (k \geqq 2), \qquad b^{ii}_{k,k+1} = b^{ii}_{k-1,k+1} \quad (k \geqq 2), \qquad b^{ii}_{k,k-1} = b^{ii}_{k,k-2} \quad (k \geqq 3),$$

équations qui se réduisent à

$$(22) \qquad b^{ii}_{kk} = b^{ii}_{k,k-1} \qquad (k \geqq 2), \qquad\qquad b^{ii}_{k,k-1} = b^{ii}_{k,k-2} \qquad (k \geqq 3),$$

d'où

$$(23) \qquad \begin{cases} a^{ii}_{kk} = a^{ii}_{k-1,k} + a^{ii}_{k,k-1} = d^{ii}_{k,k-1}\zeta & (k \geqq 1), \\ a^{ii}_{kk} = a^{ii}_{k-2,k} + a^{ii}_{k,k-2} = d^{ii}_{k-2,k}\zeta & (k \geqq 2). \end{cases}$$

Ainsi (20) *et* (21) *subsistent tant qu'un des trois termes des premiers membres n'est pas de la forme b^{ii}_{kk} ou d^{ii}_{kk}.* Donc, pour $j \neq i$, (21) donne les mêmes conséquences que précédemment. Pour $j = i$, elle montre de même, jointe à $d^{ii}_{kk} = 0$, que les d^{ii}_{kl} situés au-dessous de la transversale principale de A^{ii} sont nuls. (23) montre ensuite que les a^{ii}_{kk} situés au-dessous de la transversale principale sont tous nuls si m_i est impair, tous nuls sauf le plus voisin de cette transversale si m_i est pair.

27. *Soit m_i impair* $= 2\mu_i - 1$. D'après la seconde équation (23) où l'on fait $k = \mu_i + 1$, $d^{ii}_{\mu_i-1,\mu_i+1}$ est nul. Donc, d'après (21), tous les éléments de la transversale principale, sauf $a^{ii}_{\mu_i\mu_i}$, sont nuls. De même, si a^{ii}_{kk} est $\neq 0$ pour $k = l$ et nul pour $k > l$, tous les éléments situés au-dessous de la transversale T_l passant par a^{ii}_{ll} sont nuls comme aussi ceux de T_l autres que a^{ii}_{ll} [on peut encore supposer les éléments de T_l réels et égaux à a^{ii}_{ll}; c'est T_l que j'appellerai ici *caractéristique* (*cf.* **5**)]. On voit *sur la figure,* d'après (21) et (23), que A^{ii} est complètement déterminée par $a^{ii}_{11}, \ldots, a^{ii}_{\mu_i\mu_i}$.

Les A^{ij} d'une même ligne ou colonne de $\mathcal{A}_{11}$ (considérée comme matrice des A^{ij}) ne sont pas toutes de rang $< m$, sans quoi a aurait une ligne ou une colonne nulle, et $|a|'$ serait nul (on peut même affirmer ici, pour la même raison, qu'*une des* A^{ij} *où* i *est* $\neq j$ *est de rang* m). En raisonnant alors comme au nº **4**, on voit que

$$|a| = \Pi \mathcal{A}_{\rho\rho},$$

que

$$|\mathcal{A}_{11}| = |A^{1m}_{11}|^{m-1} |A^{\mu\mu}_{11}|,$$

que

$$|a|' = \Pi |\mathcal{A}_{\rho\rho}|'$$

et que

$$|\mathcal{A}_{11}|' = (|A^{1m}_{11}|')^m = |B^{1m}_{11}|^m.$$

Or $|A^{1m}_{11}|'$ est un déterminant gauche d'ordre q. *Donc* q *est pair* $= 2q'$.

Soit m_i pair $= 2\mu_i$.

Si a^{ii}_{kk} est $\neq 0$ pour $k = l$ et nul $k > l$, la transversale caractéristique (au même sens que dans le cas de m_i impair) est celle passant par a^{ii}_{ll}. Il est clair aussi que A^{ii} est complètement déterminée par $a^{ii}_{11}, \ldots, a^{ii}_{\mu_i+1,\mu_i+1}$ (ce dernier élément peut ici être $\neq 0$). Comme précédemment, on voit que

$$|a|' = \Pi |\mathcal{A}_{\rho\rho}|'$$

et que

$$|\mathcal{A}_{11}|' = |B^{1m}_{11}|^m.$$

Les réductions ultérieures dépendent des différents types canoniques de B^{1m}_{11} dans $\mathfrak{S}$.

28. *Supposons désormais* $\mathfrak{S}$ *d'ordre* 2^κ.

Soit d'abord $m_i = 2\mu_i - 1$ ($\mu_1 = \mu$), donc $q = 2q'$ (**27**).

Par une substitution réelle du groupe des sous-séries, on peut réduire $B_{11}^{\mu\mu}$ à l'un des deux types canoniques contenus dans la forme

$$F_\theta = \theta[(x_\mu^1)^2 + (x_\mu^2)^2] + \Sigma_1^{q'} x_\mu^{2k-1} x_\mu^{2k},$$

θ étant égal à o ou à un élément définissant (*E.*, 27) arbitraire λ de ε, tel que

$$z^2 + z + \lambda$$

soit irréductible dans ε (*E.*, 45; j'appellerai *premier type* celui où $\theta = 0$, *second type* celui où $\theta = \lambda$, et je dirai qu'une forme quadratique est de la *première* ou de la *seconde classe* suivant qu'elle est réductible au premier ou au second type). A^{12} et A^{21}, A^{34} et A^{43}, ..., $A^{q-1,q}$ et $A^{q,q-1}$ étant donc seules de rang m parmi les A^{ij} où i et j sont différents et $\leqq q$, on pourra, par des additions de transversales à multiplicateurs réels jointes à des additions symétriques par rapport à la diagonale principale, annuler tous les autres A^{ij} des $\mathcal{A}_{1i}$ et des $\mathcal{A}_{i1}$, sauf, si $\theta = \lambda$, A^{11} et A^{22} (en observant qu'on peut supposer la transversale caractéristique de chaque A^{ii} formée d'éléments réels et égaux). Par des additions de même espèce, on réduira ensuite $A^{2i-1,2i}$ ($i \leqq q'$) à la forme bilinéaire type (6) multipliée par $\upsilon\zeta^{-1} = \xi$.

Si $\theta = 0$, la réduction est achevée. Si $\theta = \lambda$, par des additions analogues de la transversale principale de A^{12} aux transversales de A^{11} (la transversale de A^{22} qui s'ajoutera en même temps aux transversales de A^{21} et de A^{12} pourra être négligée, puisqu'elle n'introduit que les éléments réels), on annulera a_{kk}^{11} pour $k < \mu$. Alors tous les d_{kl}^{11}, où k et l sont $< \mu$, sont nuls, et, d'après (21) et (23), la matrice des a_{kl}^{11} où $k = 1, \ldots, \mu$ et $l = \mu, \ldots, m$ est, à l'exception de $a_{\mu\mu} = 1$, le produit par ξ d'une matrice du second type (6) (en négligeant toujours les parties réelles des éléments non diagonaux). A^{22} se ramène à la même forme que A^{11}.

Soit

$$a_2^m = \Sigma A^{ij} \quad (i, j = 1, 2), \qquad b_2^m = \Sigma B^{ij} \quad (i, j = 1, 2).$$

Prenons dans b_2^m le coefficient de x_1^1 pour x_m^2, puis celui de x_1^2 pour x_1^m, et appliquons la même substitution à a_2^m. Soient b_2^{m-2} et a_2^{m-2} les formes qui se déduisent alors de b_2^m, a_2^m quand on annule x_1^1, x_1^2, x_m^1, x_m^2 : la matrice a_2^{m-2} se déduit de a_2^m en supprimant la première ligne et la première colonne de chaque A^{ij} où $i, j = 1, 2$, et

$$b_2^m = x_1^1 x_m^2 + x_1^2 x_m^1 + b_2^{m-2}$$

(a_2^{m-2} et b_2^{m-2} n'ont plus les formes réduites analogues à celles de a_2^m, b_2^m). En répétant l'opération, on ramène b_2^m à la forme

$$R + x_\mu^1 x_\mu^2 + \theta[(x_\mu^1)^2 + (x_\mu^2)^2],$$

R étant une somme de rectangles où chaque variable autre que x_μ^1 ou x_μ^2 figure une fois et une seule. Cette transformation se faisant quel que soit θ et pouvant par suite se faire sur

$$b_4^m = \Sigma B^{ij} \qquad (i, j = 3, 4), \qquad \ldots,$$

on voit que $\mathfrak{B}_{11}$ est de la même classe que F_θ (avec mq variables).

Remarque. — En écrivant x_{2k-1}, x_{2k}, y_{2k-1}, y_{2k} respectivement pour

$$x_{\mu-k}^2, \quad x_{\mu-k}^1, \quad x_{\mu+k}^1, \quad x_{\mu+k}^2 \qquad (k = 1, \ldots, \mu - 1),$$

x_0 pour x_μ^1, y_0 pour x_μ^2, l'action du changement de variables effectué sur les x_i^1, x_i^2 est de la forme

$$(24) \qquad X_i = x_i, \qquad Y_i = y_i + \varphi_i(y_0, \ldots, y_{i-1}, x_0, \ldots, x_{2\mu-2}),$$

le changement inverse ayant la même forme. L'action de α sur ces variables a la forme

$$(25) \quad \left|\begin{array}{lll} X_i & X_i + X_{i+2} & (i = 0, \ldots, 2\mu - 4) \\ Y_0 & Y_0 + X_1 & \\ Y_i & Y_i + \Phi_i(Y_0, \ldots, Y_{i-1}, X_0, \ldots, X_{2\mu-2}) & (i = 1, \ldots, 2\mu - 2) \end{array}\right|,$$

$X_{2\mu-3}$ et $X_{2\mu-2}$ étant conservés.

En écrivant de même x_k pour x_k^{2l+1} ($l \geqq 1$) et y_{k+1} pour x_{m-k}^{2l+2}, l'action du changement de variables effectué sur les x_k^{2l+1} et les x_k^{2l+2} a la forme

$$(26) \quad \left\{\begin{array}{l} X_i = x_i, \qquad Y_i = y_i + \varphi_i(y_{i+1}, \ldots, y_m) \qquad (i = 1, \ldots, m-2), \\ \qquad\qquad Y_{m-1} = y_{m-1}, \qquad Y_m = y_m, \end{array}\right.$$

le changement inverse ayant la même forme. L'action de α sur ces variables a la forme

$$(27)\qquad \left|\begin{array}{ll} X_i & X_i + X_{i-1} \quad (i=2, \ldots, m) \\ Y_i & Y_i + \Phi_i(Y_{i+1}, \ldots, Y_m) \quad (i=1, \ldots, m-1) \end{array}\right|,$$

X_1 et Y_m étant conservés.

29. *Soit* $m_i = 2\mu_i\,(\mu_1 = \mu)$, *et d'abord* $q = 2q'$.

On peut alors ramener B_{11}^{1m} à la forme Φ_0 ou à la forme Φ_2 du n° **24** (où l'on remplace chaque y_m^k par x_m^k).

Si B_{11}^{1m} *se ramène à la forme* Φ_0, les d_{1m}^{ii} et, par suite, d'après (21) et (23), les $a_{\mu+1,\mu+1}^{ii}$ sont tous nuls. On pourra donc opérer comme dans le cas de m impair pour annuler tous les A^{ij} autres que les $A^{2i-1,2i}(i \leqq q')$ qu'on ramènera à la forme type (**6**) multipliée par $\xi = \upsilon\zeta^{-1}$ et pour vérifier que B_{11} est, comme B_{11}^{1m} de la première classe. La forme du changement de variables effectué pour canoniser $\mathfrak{B}_{11}$ et l'action de α sur les nouvelles variables sont données par (26) et (27), t pouvant ici prendre la valeur o.

30. *Si* B_{11}^{1m} *se ramène à la forme* Φ_2, d_{1m}^{ii} et $a_{\mu+1,\mu+1}^{ii}$ sont encore nuls pour $i > 2$; mais, pour $i \leqq 2$, $d_{1m}^{ii} = \xi$ et $a_{\mu+1,\mu+1}^{ii} = 1$ [d'après (21) et (23)]. On pourra opérer comme précédemment pour annuler d'abord tous les A^{ij} autres que A^{11} et A^{22} où l'un des indices i, j est $\leqq 2$ (*en négligeant la partie réelle des éléments non diagonaux;* ainsi la présence de $a_{\mu+1,\mu+1}^{ii} \neq 0$ et le fait que $a_{kl}^{ii} = \dot{a}_{lk}^{ii}$ n'altèrent pas les résultats), puis tous les A^{ij} où i ou j est $\geqq 3$, sauf les $A^{2k-1,2k}$ et les $A^{2k,2k-1}$ où $k = 1, \ldots, q'$ qu'on réduira à la forme type (**6**).

Par une addition de la $m^{\text{ième}}$ transversale de $A^{ij}(i = 1, 2)$ à la $(m-1)^{\text{ième}}$ jointe à l'addition symétrique, on peut ramener $a_{\mu\mu}^{ii}$ à $a_{\mu\mu}^{ii} + t + t^2$, t étant quelconque dans $\mathfrak{S}$. Si donc $z^2 + z + a_{\mu\mu}^{ii}$ est réductible dans $\mathfrak{S}$, on pourra ainsi annuler $a_{\mu\mu}^{ii}$. Si $z^2 + z + a_{\mu\mu}^{ii}$ est irréductible, on pourra réduire $a_{\mu\mu}^{ii}$ à une quelconque des 2^{n-1} valeurs c telles que $z^2 + z + c$ soit irréductible dans $\mathfrak{S}$ (*E.*, 40, 45). En toute hypothèse, et sans altérer $a_{\mu\mu}^{ii}$, on pourra, par des additions analogues, annuler successivement $a_{\mu-1,\mu-1}^{ii}, \ldots, a_{11}^{ii}$, et alors, d'après (21) et (23), tous les d_{kl}^{ii}, où k et l sont $< \mu$ ($\leqq \mu$ si $a_{\mu\mu}^{ii} = 0$), seront nuls.

Si donc $z^2 + z + a_{\mu\mu}^{11}$ *et* $z^2 + z + a_{\mu\mu}^{22}$ *sont réductibles dans* $\mathfrak{S}$, on peut annuler $a^{11}_{\mu\mu}$ et $a^{22}_{\mu\mu}$, et la matrice des a^{ij}_{kl} où $k = 1, \ldots, \mu + 1$ et $l = \mu + 1, \ldots, m$ est, à l'exception de $a^{ii}_{\mu+1,\mu+1}$ égal à 1, le produit par ξ d'une matrice du second type (**6**).

Si l'un des trinomes $z^2 + z + a^{ii}_{\mu\mu}$ $(i = 1, 2)$ *est irréductible dans* $\mathfrak{S}$, on peut toujours faire que ce soit

$$z^2 + z + a^{11}_{\mu\mu}.$$

Si $a^{22}_{\mu\mu}$ est $\neq 0$, on peut l'annuler par une addition de la $(m-1)^{\text{ième}}$ transversale de A^{11} à la $(m-1)^{\text{ième}}$ de A^{12}, puis de la $(m-1)^{\text{ième}}$ transversale de A^{12} à la $(m-1)^{\text{ième}}$ de A^{22} (chaque opération étant toujours suivie de l'opération symétrique). *Soit donc*

$$a^{11}_{\mu\mu} = \lambda, \qquad a^{22}_{\mu\mu} = 0.$$

A^{22} a la même forme que dans le cas précédent, où $a^{11}_{\mu\mu}$ et $a^{22}_{\mu\mu}$ étaient nuls. A^{11} se détermine aisément en utilisant la remarque finale du n° **5**. Soit, en effet, d'une manière générale et quel que soit m,

$$A^{11}(a^{11}_{\mu\mu}, a^{ii}_{\mu+1,\mu+1})_m$$

la détermination de A^{11} quand on fait nuls tous les a^{11}_{kk}, sauf $a^{11}_{\mu\mu}$ et $a^{11}_{\mu+1,\mu+1}$. On aura

$$A^{11}(1, 1)_m = A^{11}(0, 1)_m + \lambda A^{11}(1, 0)_m,$$

et il est clair que $A^{11}(1, 0)_m$ s'obtient en bordant $A^{11}(0, 1)_{m-1}$ (qui est la forme réduite trouvée pour la valeur $2\mu - 1$ de m) d'une $m^{\text{ième}}$ colonne et d'une $m^{\text{ième}}$ ligne de zéros.

Dans les deux formes de a qu'on vient d'obtenir, il y a, pour chaque $i \leqq q$, un seul $j \leqq q$ tel que A^{ij} soit $\neq 0$. Donnons à j cette valeur pour chaque $i \leqq q$, puis prenons, si $j = i \leqq 2$,

$$\begin{array}{lll}
\Sigma_{l=1}^{m} b^{ii}_{1l} x^i_l & \text{pour} & x^i_m, \\
\Sigma_{l=1}^{m-1} b^{ii}_{2l} x^i_l & \text{pour} & x^i_{m-1}, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\Sigma_{l=1}^{\mu+2} b^{ii}_{\mu-1,l} x^i_l & \text{pour} & x^i_{\mu+2},
\end{array}$$

$$x^i_{\mu+1} \quad \text{ou} \quad d^{-\frac{1}{2}} x^i_{\mu+1} \quad (d^2 = \lambda) \qquad \text{pour} \quad x^i_{\mu+1} \text{ selon que } a^{ii}_{\mu\mu} = 0 \text{ ou } \lambda,$$

$$x^i + x^i_{\mu+1} \quad \text{ou} \quad d^{\frac{1}{2}} x^i_\mu \qquad \text{pour} \quad x^i_\mu \text{ selon que } a^{ii}_{\mu\mu} = 0 \text{ ou } \lambda.$$

et, si $j \neq i$,

$$\sum_{l=1}^{m-k} b_{k+1,l}^{ij} x_l^r \qquad \text{pour} \qquad x_{m-k}^i \qquad (k = 0, \ldots, m-1).$$

$\mathfrak{B}_{11}$ se trouve ainsi réduit, si $a_{\mu\mu}^{11} = 0$, à

$$R + x_\mu^1 x_{\mu+1}^1,$$

si $a_{\mu\mu}^{11} = \lambda$, à

$$R + x_\mu^1 x_{\mu+1}^1 + d[(x_\mu^1)^2 + (x_\mu^2)^2],$$

R désignant une somme de rectangles où chacune des variables autres que x_μ^1, $x_{\mu+1}^1$ figure dans un terme et dans un seul. Or ces deux formes ne sont pas équivalentes (*E.*, 45). Donc les formes correspondantes de b ne sont *a fortiori* pas transformables l'une dans l'autre par des substitutions permutables à α, lesquelles permutent exclusivement entre elles les variables de $\mathfrak{B}_{11}$. *Donc aucun changement de variables conservant la forme de α ne peut transformer l'une dans l'autre les deux formes considérées de b.* On voit en même temps que $\mathfrak{B}_{11}$ *est de la première ou de la seconde classe selon que, dans la forme réduite, $a_{\mu\mu}^{11}$ est égal à 0 ou à λ.*

Remarque. — Si $a_{\mu\mu}^{11} = 0$, le changement de variables effectué sur les x_k^1 est, en écrivant x_k pour $x_k^1 (k = 1, \ldots, \mu)$ et y_{k+1} pour $x_{m-k+1}^1 (k = 1, \ldots, \mu)$, de la forme

$$(28) \qquad \begin{cases} X_i = x_i \quad (i = 1, \ldots, \mu - 1), \qquad X_\mu = x_\mu + y_\mu, \\ Y_i = y_i + \varphi_i(y_{i+1}, \ldots, y_\mu) \quad (i = 1, \ldots, \mu - 1), \qquad Y_\mu = y_\mu, \end{cases}$$

et le changement de variables inverse a la même forme. L'action de α sur ces variables a la forme

$$(29) \qquad \left| \begin{array}{ll} X_1 & X_1 \\ X_i & X_i + X_{i-1} \quad (i = 2, \ldots, \mu - 1) \\ X_\mu & X_{\mu-1} + Y_\mu \\ Y_i & Y_i + \Phi_i(Y_{i+1}, \ldots, Y_\mu, X_\mu) \quad (i = 1, \ldots, \mu - 1) \\ Y_\mu & Y_\mu + X_\mu \end{array} \right| .$$

Si $a_{\mu\mu}^{11} = \lambda$, le changement de variables effectué sur les x_k^1 est, en écrivant x_k pour $x_k^1 (k = 1, \ldots, \mu - 1)$, y_{k+1} pour $x_{m-k+1}^1 (k = 1, \ldots, \mu - 1)$,

x_0 pour x^1_μ, y_0 pour $x^1_{\mu+1}$, de la forme

$$(30)\quad \begin{cases} X_i = x_i \quad (i=1,\ldots,\mu-1), \qquad X_0 = d^{\frac{1}{2}} x_0, \\ Y_i = y_i + \varphi_i(y_{i+1},\ldots,y_{\mu-1},y_0,x_0) \qquad (i=1,\ldots,\mu-2), \\ \qquad Y_{\mu-1} = y_{\mu-1} + \varphi_{\mu-1}(y_0,x_0), \qquad Y_0 = d^{-\frac{1}{2}} y_0, \end{cases}$$

et le changement de variables inverses a la même force, d y étant remplacé par d^{-1}. L'action de α sur ces variables a la forme

$$(31)\quad \left| \begin{array}{ll} X_1 & X_1 \\ X_i & X_i + X_{i-1} \qquad (i=2,\ldots,\mu-1) \\ X_0 & X_0 + d^{\frac{1}{2}} X_{\mu-1} \\ Y_i & Y_i + \Phi_i(Y_{i+1},\ldots,Y_{\mu-1},Y_0,X_0,X_{\mu-1}) \quad (i=1,\ldots,\mu-2) \\ Y_{\mu-1} & Y_{\mu-1} + \Phi_{\mu-1}(Y_0,X_0,X_{\mu-1}) \\ Y_0 & Y_0 + d^{-1} X_0 \end{array} \right|.$$

51. *Soit* $m_i = 2\mu_i$ ($\mu_1 = \mu$) *avec* $q = 2q'+1$.

Alors B^{1m}_{11} se ramène à la forme Φ_1, et l'on peut annuler tous les A^{ij}, sauf A^{11} et les $A^{2i.2i+1}$, $A^{2i+1.2i}$ ($i=1,\ldots,q'$), A^{11} se ramenant à l'une des deux formes précédentes et les $A^{2i.2i+1}$, $A^{2i+1.2i}$ à la forme bilinéaire type (6).

Sur la distinction et la classe des formes réduites, comme sur les variables à introduire pour ramener b au type normal correspondant, et sur la forme de α avec ces nouvelles variables, il n'y a qu'à répéter ce qui a été dit au numéro précédent.

52. Le nombre $N(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots)$ des éléments de a (ou de b) qui restent arbitraires, une fois choisis les éléments de $B^{1m_{Q_\rho}}_{\rho\rho}$ (de manière que $|B^{1m_{Q_\rho}}_{\rho\rho}|$ soit $\neq 0$) et les éléments $a^{Q_{\rho-1}+1,Q_{\rho-1}+1}_{\mu_{Q_\rho}\mu_{Q_\rho}}$ qui répondent aux $B^{1m_{Q_\rho}}_{\rho\rho}$ équivalentes à des types normaux de la forme Φ_2 et Φ_1, est fourni, d'après ce qui précède, par

$$N(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots) = N_1 + N(Q_2, m_{Q_2}; \ldots),$$

$$N_1 = \psi(\mu) + \frac{q(q-1)}{2}(m-1) + q(n-qm),$$

$\psi(\mu)$ étant égal à $q(\mu-1)$ si m est impair, à $q\mu$ si m est pair et $B_{11}^{\prime m}$ équivalente à Φ_0, à $q\mu-1$ si m est pair et $B_{11}^{\prime m}$ équivalente à Φ_2 ou à Φ_1.

Le nombre $\mathfrak{N}(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots)$ des formes b est donc donné par

$$\mathfrak{N}(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots) = M_{mq}\pi^{N_1}\varpi\,\mathfrak{N}(Q_2, m_{Q_2}, \ldots),$$

M_{mq} étant l'indice dans $L(q, \pi)$ du groupe de F_0 si m est impair, du groupe de Φ_0 si m est pair et $B_{11}^{\prime m}$ équivalente à Φ_0, du groupe de Φ_2 ou de Φ_1 si m est pair et $B_{11}^{\prime m}$ équivalente à Φ_2 ou à Φ_1 respectivement, enfin ϖ étant égal à 1 si m est impair, ou si m est pair et $B_{11}^{\prime m}$ équivalent à Φ_0, à $\frac{\pi}{2}$ dans tous les autres cas.

De l'analyse précédente résulte, comme au n° **24**, que *le nombre des types réduits distincts est* $2^{\delta}3^{\delta'}$, δ' *étant le nombre des sous-séries pour lesquelles* m_i *et* q_i *sont pairs,* δ *le nombre des autres.*

33. Le problème inverse de celui considéré jusqu'ici est celui qui consiste, étant donnés la forme bilinéaire a et le champ $\mathfrak{C}$, à trouver tous les couples de substitutions α, β telles que

$$\beta a \bar{\alpha} = a.$$

Sur ce problème, qui a donné lieu à de nombreux travaux, je me bornerai à deux observations.

Supposons que, $\mathfrak{C}$ étant le champ des nombres complexes ordinaires, a soit une forme bilinéaire à variables conjuguées *définie,* et soit $\mathcal{A}$ le groupe des α telles que $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a$. *L'ensemble* $\mathfrak{B} = \Sigma\beta$ *des substitutions de* $\mathcal{A}$ *dont les coefficients sont des entiers algébriques du champ* $\mathfrak{R} = R(\xi)$ *résultant de l'adjonction au champ* R *des nombres rationnels d'une racine* ξ *d'une équation du second degré à coefficients dans* R *et à racines imaginaires est un groupe fini* (¹). En effet, le produit de deux entiers de $\mathfrak{R}$ est un entier de $\mathfrak{R}$. De plus, comme $|\beta\dot{\beta}| = 1$, $|\beta|$ divise 1 et par suite tout entier de $\mathfrak{R}$. Donc les coefficients de β^{-1} sont entiers et $\mathfrak{B}$ est un groupe (*E.*, 8). D'ailleurs

(¹) C'est l'extension d'une observation déjà faite par M. Picard [*A. M.*, t. I, p. 300 (1882)].

les multiplicateurs de α, ayant pour module 1 (**10**), sont ici des racines algébriques de 1 (¹). Donc $\mathfrak{B}$ est fini (²).

Le théorème analogue relatif au cas où a est une forme quadratique définie, $\mathfrak{C}$ étant le champ des nombres réels, se démontrerait de même. Mais il se réduit à ceci que l'ensemble des substitutions linéaires à coefficients entiers (ordinaires) qui conservent la forme $\Sigma_1^n x_i^2$ est un groupe d'ordre $n!\,2^n$ formé de toutes les permutations des x_i accompagnées de la multiplication de chacun d'eux indépendamment les uns des autres par ± 1. Or on le voit de suite directement.

54. Soit $\mathfrak{C}$ d'ordre $p^k = \pi$ (p premier), $a = \psi + \Sigma_1^n x_i y_i$, ψ ayant, si $p > 2$, l'une des formes 0, cx^2 (c étant quelconque dans $\mathfrak{C}$), $x^2 - hy^2$ (irréductible dans $\mathfrak{C}$), et, si $p = 2$, l'une des formes 0, $xy + h(x^2 + y^2)$ (irréductible dans $\mathfrak{C}$). Je désignerai par n le nombre des variables de a.

Le groupe $\mathfrak{A}(n, \pi) = \mathfrak{A}$ de a dans $\mathfrak{C}$ dérive (³) :

1° Des substitutions

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix} = t_i, \qquad \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda y_i \end{vmatrix} = V_{ik\lambda} \qquad (i \neq k),$$

$$\begin{vmatrix} x_i & \lambda x_i \\ y_i & \lambda^{-1} y_i \end{vmatrix} = m_{i\lambda} \qquad (i, k = 1, \ldots, \nu);$$

2° Des substitutions $V_{0k\lambda}$, $V_{i0\lambda}$ ($i, k = 1, \ldots, \nu$) égales respectivement, si $\psi = 0$, à $1, 1$;

si $\psi = cx^2$, à

$$\begin{vmatrix} x & x + \lambda x_k \\ y_k & y_k - 2c\lambda x - c\lambda^2 x_k \end{vmatrix}, \quad 1;$$

si $\psi = x^2 - hy^2$, à

$$\begin{vmatrix} x & x + \lambda x_k \\ y_k & y_k - 2\lambda x - \lambda^2 x_k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_i & x_i - 2h\lambda y + h\lambda^2 y_i \\ y & y - \lambda y_i \end{vmatrix};$$

(¹) *Voir* Lœwy, *N. A. H.*, t. LXXI, 1898, p. 391; Kronecker, *Cr.*, t. LIII, 1857, p. 173.

(²) *Voir* Burnside, *P. L. M. S.*, 2ᵉ série, t. III, 1905, p. 438.

(³) Les générateurs indiqués ici ne sont pas tout à fait ceux employés par M. Jordan et M. Dickson; mais la démonstration du théorème sous la forme adoptée ici se fait d'une manière toute semblable.

si $\psi = xy + h(x^2 + y^2)$, à

$$\begin{vmatrix} x & x + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda y - 2h\lambda x - h\lambda^2 x_k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda x + 2h\lambda y - h\lambda^2 y_i \\ y & y - \lambda y_i \end{vmatrix};$$

3° Des générateurs du groupe Ψ de ψ dans $\mathfrak{S}$. Si $\psi = 0$, je supposerai que $\Psi = 1$. Si $\psi = cx^2$, Ψ est engendré par $|x, -x|$ d'ordre 2. Si $\psi = x^2 - hy^2$, Ψ dérive des substitutions de la forme

$$\begin{vmatrix} x & \lambda x + h\mu y \\ y & \mu x + \lambda y \end{vmatrix}$$

(λ, μ étant une solution quelconque de $\lambda^2 - h\mu^2 = 1$) qui forment un groupe cyclique Ψ' d'ordre $\pi + 1$, et de

$$t_0 = \begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix}.$$

Si

$$\psi = xy + h(x^2 + y^2) \qquad (\text{alors } p = 2),$$

Ψ dérive des substitutions

$$\begin{vmatrix} x & \lambda x - \mu y \\ y & \mu x + (\lambda + \mu h^{-1}) y \end{vmatrix}$$

[λ, μ étant une solution quelconque de

$$\lambda\mu + h(\lambda^2 + \mu^2) = h]$$

qui forment un groupe cyclique Ψ' d'ordre $\pi + 1$, et de

$$t_0 = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}.$$

En posant encore $\Psi' = 1$ pour $\psi = 0$ et $\psi = cx^2$, on voit que Ψ' est, pour $p > 2$, le diviseur de Ψ formé de ses substitutions de déterminant 1.

Soit de même, pour $p > 2$, $\mathcal{A}'(n, \pi) = \mathcal{A}'$ le diviseur de $\mathcal{A}$ formé de ses substitutions de déterminant 1. On a

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + t_0 \mathcal{A}',$$

t étant l'une des substitutions t_0 ($t_0 = 1$ pour $\psi = 0$ et $\psi = cx^2$),

$t_1, \ldots, t_\nu$. *On peut donc définir* $\mathcal{A}'$ *comme le plus petit commun multiple* P *de* Ψ' *et des*

$$t_i t_j, \quad V_{ij\lambda},$$

$$U_{ij\lambda} = t_j V_{ij\lambda} t_j, \quad W_{ij\lambda} = t_j V_{ji,-\lambda} t_j, \quad m_{k\lambda} \quad (i, j = 0, \ldots, \nu;\, i \neq j;\, k = 1, \ldots, \nu);$$

car P est évidemment permutable à t, en sorte que $\mathcal{A} = \mathrm{P} + t\mathrm{P}$.

Si $p = 2$, *cette seconde définition de* $\mathcal{A}'$ *a un sens.* $\mathcal{A}'$ *est alors encore d'indice* 2 *dans* $\mathcal{A}$. Pour $n = 2$, cela a déjà été indiqué tout à l'heure. Soit donc $n > 2$. Toute substitution α de $\mathcal{A}'$, prise sous la forme

$$(32) \quad \alpha = |\, x_i, y_i;\ \Sigma_k(\alpha_{ik} x_k + \alpha'_{ik} y_k),\ \Sigma_k(\beta_{ik} x_k + \beta'_{ik} y_k) \,| \qquad (i, k = 0, \ldots, \nu)$$

vérifie l'égalité

$$(33) \quad \mathrm{I}_\alpha = \Sigma_{ik} \alpha_{ik} \beta'_{ik} + h^2(\alpha_{00}^2 + \alpha'^2_{00} + \beta_{00}^2 + \beta'^2_{00}) = \frac{n}{2} \qquad (i, k = 0, \ldots, \nu);$$

car la substitution unité vérifie (33), et, γ étant un générateur de $\mathcal{A}'$, $\gamma\alpha$ vérifie ou ne vérifie pas (33) en même temps que α, comme le montre un calcul direct (d'après les relations connues qui lient les coefficients de α). Donc t, ne vérifiant pas (33), est hors de $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + t\mathcal{A}'$. Comme $t\alpha$ ne vérifie pas (33) si α la vérifie, on voit de plus que $\mathcal{A}'$ *est formé des substitutions de* $\mathcal{A}$ *qui vérifient* (33) [1].

55. Pour $p = 2$ les substitutions de $\mathcal{A}'$ sont dites *paires*, les autres *impaires*. Tout changement de variables à coefficients dans $\mathfrak{S}$ *qui conserve* a conserve *a priori* $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ (la matrice du changement de variables est celle d'une substitution de $\mathcal{A}$), donc aussi la parité de chaque substitution α de $\mathcal{A}$ et celle de I_α.

La forme canonique d'une substitution α *de* $\mathcal{A}$ *a un nombre pair ou impair de suites selon que* α *est paire ou impaire.* — Si α n'a que des multiplicateurs égaux à 1, on le vérifie directement à l'aide des remarques des n^{os} **28** et **50**. Dans le cas contraire, soient α' la partie de α (mise sous forme canonique) répondant aux multiplicateurs $\neq 1$, et a' la partie correspondante de a. Prenons α' pour α et a' pour a. α a un nombre pair de suites, et l'on peut introduire des variables réelles

---

[1] *Voir* DICKSON, *Linear Groups*, p. 206-208.

(c'est-à-dire des fonctions réelles des variables primitives x_i à coefficients dans $\mathfrak{S}$) ξ_i, η_i telles que a ait la forme $\Sigma\xi_i\eta_i$ (**22**). D'après (33) (appliquée à la substitution primitivement donnée), *tout revient à montrer qu'avec ces variables α est paire.* Or on peut introduire d'abord, comme au n° **28**, des variables (en général non réelles) X_i, Y_i ramenant a à la forme $\Sigma X_i Y_i = a_0$ et α à une forme α_0 vérifiant (33). Le groupe de a_0 dans $\mathfrak{S}$ est $\mathcal{H}$. Soient $\mathcal{H}_\alpha$ et $\mathcal{H}'_\alpha$ les groupes analogues à $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ *dans le champ* $\mathfrak{S}_\alpha$ résultant de l'adjonction à $\mathfrak{S}$ des multiplicateurs de α. $\mathcal{H}'$ est évidemment le plus grand commun diviseur de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'_\alpha$. α_0 est dans $\mathcal{H}'_\alpha$, et l'introduction des variables ξ_i, η_i, qui conserve à a_0 sa forme, revient à transformer α_0 en une substitution de $\mathcal{H}'$ (α_0 vérifie la condition de réalité).

Sur la fonction de Green des équations différentielles linéaires ordinaires;

Par M. E. BOUNITZKY.

1. Nous nous proposons d'étudier les propriétés des fonctions de Green des équations différentielles linéaires ordinaires, en nous appuyant sur les travaux de MM. Burkhardt, Hilbert, Bôcher, Mason et Westfall, concernant ce sujet [1]. Nous construisons d'abord les fonctions de Green pour un système d'équations linéaires du premier ordre et puis nous appliquons les résultats trouvés à la théorie de la fonction de Green d'une équation linéaire ordinaire de l'ordre n. Dans cette dernière théorie nous discutons en détail deux questions : nous expliquons le rôle que jouent les autofonctions [2] adjointes de M. Schmidt dans le cas général, où la fonction de Green n'est pas symétrique, et nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour la symétrie de la fonction de Green. En considérant toujours les conditions relatives aux limites linéaires homogènes, nous nous bornons en général au cas où le déterminant de ces conditions est différent de zéro, et nous ne discutons le cas contraire que pour l'équation

[1] H. Burkhardt, *Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une dimension* (*Bull. Soc. math.*, t. XXII, 1894). — D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Zweite Mitteilung*) (*Göttinger Nachrichten*, 1904). — M. Bôcher, *Green's fonctions in space of one dimension* (*Bull. of the American Soc.*, 1901). — Ch.-M. Mason, *Inauguraldissertation, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Göttingen, 1903. — W. Westfall, *Inauguraldissertation, Zur Theorie der Integralgleichungen*, Göttingen, 1905.

[2] Nous écrirons toujours *autofonction, autovaleur* dans le sens des mots allemands *Eigenfunktion, Eigenwert*.

différentielle linéaire du second ordre adjointe à soi-même, en supposant de plus que les coefficients des conditions relatives aux limites satisfont à une certaine relation.

2. Considérons un système d'équations différentielles linéaires

$$\text{(1)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{L}_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{du_i}{dx} + a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots + a_{in}u_n = 0 \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

où les fonctions a_{ik} de x sont continues dans un intervalle donné $(x \geqq a, x \leqq b)$ (¹), avec le système adjoint

$$\text{(2)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) = -\frac{dv_i}{dx} + a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \ldots + a_{ni}v_n = 0 \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Le système (1) admet n solutions indépendantes

$$u_{\nu 1}, \quad u_{\nu 2}, \quad \ldots, \quad u_{\nu n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

continues, ainsi que a_{ik}, dans l'intervalle (a, b). Désignons le déterminant de ces solutions par

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix},$$

et le complément algébrique de l'élément u_{ki} par $[u_{ki}]$. Le déterminant $\Delta(x)$ reste continu et différent de zéro dans l'intervalle (a, b) en vertu de la relation

$$\Delta(x) = ce^{-\int \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}\,dx},$$

c désignant une constante différente de zéro, et les expressions

$$v_{\nu 1} = \frac{[u_{\nu 1}]}{\Delta}, \qquad v_{\nu 2} = \frac{[u_{\nu 2}]}{\Delta}, \qquad \ldots, \qquad v_{\nu n} = \frac{[u_{\nu n}]}{\Delta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

(¹) Nous désignerons un intervalle de cette espèce, pour abréger, par (a, b), y compris les limites $x = a$, $x = b$. De même, nous dirons qu'une fonction $f(x)$ a une qualité donnée dans l'intervalle (a, b), si cette qualité a lieu aussi pour $x = a$, $x = b$.

qui donnent n solutions indépendantes du système (2), sont aussi continues dans le même intervalle.

Nous dirons que la suite de fonctions

$$\gamma_{\nu 1}(x, \xi), \quad \gamma_{\nu 2}(x, \xi), \quad \ldots, \quad \gamma_{\nu\nu}(x, \xi), \quad \ldots, \quad \gamma_{\nu n}(x, \xi)$$

forme une *solution principale* [1] du système (1), si ce système est satisfait, en posant

$$u_i = \gamma_{\nu i}(x, \xi),$$

si les fonctions $\gamma_{\nu k}(x, \xi)$ ont, par rapport à x, dans l'intervalle (a, b), des dérivées continues pour les valeurs $1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n$ de l'indice k et si de plus la fonction $\gamma_{\nu\nu}(x, \xi)$, en gardant la même propriété dans les intervalles (a, ξ), (ξ, b), satisfait à la condition [2]

$$\lim_{\varepsilon=0} [\gamma_{\nu\nu}(\xi + \varepsilon, \xi) - \gamma_{\nu\nu}(\xi - \varepsilon, \xi)] = -1.$$

Une solution principale coïncide donc pour $x \leq \xi$ avec les intégrales

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k1}(x), \quad \sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k2}(x), \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k\nu}(x)$$

du système (1) et pour $x \geq \xi$ avec les intégrales

$$\sum_{k=1}^{k=m} m_{k\nu}\, u_{k1}(x), \quad \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k2}(x), \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{kn}(x),$$

où $\mu_{k\nu}$ et $m_{k\nu}$ sont des constantes. En désignant les différences $\mu_{k\nu} - m_{k\nu}$ respectivement par $l_{k\nu}$, on a, conformément à la définition d'une solu-

---

(1) Nous écrirons *solution principale* dans le sens du mot allemand *Grundlösung*. *Cf.* D. Hilbert, *loc. cit.*

(2) On voit donc que la fonction $\gamma_{\nu\nu}(x, \xi)$ a deux déterminations pour $x = \xi$ et la même circonstance peut avoir lieu par rapport à la dérivée d'une quelconque des fonctions $\gamma_{\nu i}(x, \xi)$; néanmoins, la solution principale ne cesse pas de satisfaire au système (1), si l'on convient de prendre la détermination de $\gamma_{\nu\nu}(x, \xi)$ pour $x = \xi$ dans l'intervalle (ξ, b) et les valeurs de toutes les dérivées droites ou la détermination de $\gamma_{\nu\nu}(x, \xi)$ pour $x = \xi$ dans l'intervalle (a, ξ) et les valeurs de toutes les dérivées gauches.

tion principale,

$$
(3)\quad \begin{cases}
\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k\lambda}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k\lambda}(\xi) = \sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}\, u_{k\lambda}(\xi) = 0 \\
\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n), \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \mu_{k\nu}\, u_{k\nu}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k\nu}(\xi) = \sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}\, u_{k\nu}(\xi) = 1.
\end{cases}
$$

En résolvant ces équations par rapport à $l_{k\nu}$, on a

$$
l_{k\nu} = \int^{x=\xi} \frac{[u_{k\nu}]}{\Delta} = v_{k\nu}(\xi),
$$

d'où vient, en tenant compte de la relation $\mu_{k\nu} - m_{k\nu} = l_{k\nu}$,

$$
(4)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\gamma_{\nu\lambda}(x, \xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} [v_{k\nu}(\xi) + m_{k\lambda}]\, u_{k\nu}(x) & (x \leqq \xi) \\
\gamma_{\nu\lambda}(x, \xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k\lambda}(x) & (x \geqq \xi)
\end{array}
\right\} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),
$$

où $m_{k\nu}$ sont des constantes arbitraires (ou des fonctions arbitraires de ξ). En donnant à l'indice r dans les formules (4) les valeurs $\nu = 1, 2. \ldots, n$, on trouve n systèmes différents de solutions principales.

3. Nous aurons besoin de considérer des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ dont les valeurs aux limites de l'intervalle (a, b) satisfassent à n équations linéaires homogènes

$$
T_k(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki}\, f_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\, f_i(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),
$$

où α_{ki}, β_{ki} sont des coefficients constants donnés. Nous désignerons l'ensemble de ces n conditions par les mots *les conditions aux limites* T et nous convenons d'écrire pour chaque suite de fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$, au lieu de

$$
\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki}\, F_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\, F_i(b), \quad \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki}\, F_i(a), \quad \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\, F_i(b),
$$

respectivement

$$T_k(F_1, F_2, \ldots, F_n), \quad T_{ak}(F_1, F_2, \ldots F_n), \quad T_{bk}(F_1, F_2, \ldots, F_n).$$

De plus, pour chacune des solutions indépendantes $u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}$ du système (1) nous posons, pour abréger,

$$\begin{gathered}
T_k(u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}) = T_k(\nu),\\
T_{ak}(u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}) = T_{ak}(\nu),\\
T_{bk}(u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}) = T_{bk}(\nu).
\end{gathered}$$

Nous supposerons toujours que les conditions T sont indépendantes; on pourra donc trouver dans la matrice

$$(5) \qquad \begin{Vmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} & \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn}
\end{Vmatrix}$$

un déterminant de l'ordre n qui soit différent de zéro.

Nous convenons de dire qu'une solution principale du système (1)

$$\begin{gathered}
\gamma_{\nu 1}(x, \xi) = G^T_{\nu 1}(x, \xi),\\
\gamma_{\nu 2}(x, \xi) = G^T_{\nu 2}(x, \xi),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\gamma_{\nu n}(x, \xi) = G^T_{\nu n}(x, \xi),
\end{gathered}$$

qui satisfait, en substituant $G^T_{\nu i}(x, \xi)$ au lieu de $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), aux conditions T, forme *une solution de Green du système* (1) *par rapport aux conditions* T.

En tenant compte des formules (4), on trouve que les coefficients $m_{i\nu}$ de la solution de Green satisfont à un système d'équations

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_{i\nu}\, T_k(i) = -\sum_{i=1}^{i=n} T_{ak}(i)\, v_{i\nu}(\xi) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si le déterminant de ce système

$$D = \begin{vmatrix}
T_1(1) & T_1(2) & \ldots & T_1(n)\\
T_2(1) & T_2(2) & \ldots & T_2(n)\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
T_n(1) & T_n(2) & \ldots & T_n(n)
\end{vmatrix},$$

que nous désignerons dorénavant comme *le déterminant du système* (1) *par rapport aux conditions* T, est différent de zéro, on a, en posant

$$D_k(ai) = \begin{vmatrix} T_1(1) & T_1(2) & \dots & T_1(k-1) & T_{a1}(i) & T_1(k+1) & \dots & T_1(n) \\ T_2(1) & T_2(2) & \dots & T_2(k-1) & T_{a2}(i) & T_2(k+1) & \dots & T_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(1) & T_n(2) & \dots & T_n(k-1) & T_{an}(i) & T_n(k+1) & \dots & T_n(n) \end{vmatrix},$$

$$m_{k\nu} = -\frac{\sum_{i=1}^{i=n} D_k(ai)\, v_{i\nu}(\xi)}{D},$$

d'où, en posant

$$D_k(bi) = \begin{vmatrix} T_1(1) & \dots & T_1(k-1) & T_{b1}(i) & T_1(k+1) & \dots & T_1(n) \\ T_2(1) & \dots & T_2(k-1) & T_{b2}(i) & T_2(k+1) & \dots & T_2(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(1) & \dots & T_n(k-1) & T_{bn}(i) & T_n(k+1) & \dots & T_n(n) \end{vmatrix}$$

et en remarquant que la somme $D_k(ai) + D_k(bi)$ est égale à zéro pour $k \neq i$ et à D pour $k = i$, on trouve

$$m_{k\nu} + v_{k\nu}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} D_k(bi)\, v_{i\nu}(\xi)}{D}.$$

En substituant ces valeurs de $m_{k\nu}$ et de $m_{k\nu} + v_{k\nu}(\xi)$ dans les formules (4), on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} G^T_{\nu\lambda}(x, \xi) &= \frac{\sum_{k=1}^{k=n} u_{k\lambda}(x) \sum_{i=1}^{i=n} D_k(b_i)\, v_{i\nu}(\xi)}{D} \quad (x \leq \xi) \\ G^T_{\nu\lambda}(x, \xi) &= -\frac{\sum_{k=1}^{k=n} u_{k\lambda}(x) \sum_{i=1}^{i=n} D_k(a_i)\, v_{i\nu}(\xi)}{D} \quad (x \geq \xi) \end{aligned} \right\} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

En faisant parcourir à l'indice ν les valeurs 1, 2, ..., n, les formules (7) donnent n solutions de Green différentes. Nous désignerons chacune de ces n^2 fonctions $G^T_{\nu\lambda}(x, \xi)$ par les mots *fonction de Green* *du système* (1) *par rapport aux conditions* T. En disposant les n^2 fonctions de Green dans la forme d'un carré

$$(8)\qquad \begin{cases} G^T_{11}(x,\xi), & G^T_{12}(x,\xi), & \ldots, & G^T_{1n}(x,\xi), \\ G^T_{21}(x,\xi), & G^T_{22}(x,\xi), & \ldots, & G^T_{2n}(x,\xi), \\ G^T_{n1}(x,\xi), & G^T_{n2}(x,\xi), & \ldots, & G^T_{nn}(x,\xi), \end{cases}$$

on voit que les fonctions de Green d'une même ligne de ce carré forment une solution de Green et que les fonctions $G^T_{\nu\nu}(x,\xi)$, placées sur la diagonale du carré, vérifient la relation

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[G^T_{\nu\nu}(\xi+\varepsilon,\xi)-G^T_{\nu\nu}(\xi-\varepsilon,\xi)\right]=-1,$$

toutes les autres fonctions de Green étant continues dans l'intervalle (a, b).

4. Nous dirons qu'une suite de fonctions

$$u_1=\psi_1(x),\qquad u_2=\psi_2(x),\qquad \ldots\qquad u_n=\psi_n(x)$$

qui ne se réduisent pas toutes identiquement à zéro forme une *solution distinguée du système* (1) *par rapport aux conditions* T, si ces fonctions, admettant des dérivées continues dans l'intervalle (a, b), satisfont au système (1) et aux conditions T.

Une solution distinguée doit donc s'exprimer par les n solutions indépendantes $u_{\nu 1}, u_{\nu 2}, \ldots, u_{\nu n}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ du système (1) au moyen des formules

$$(9)\qquad \psi_\nu=\sum_{i=1}^{i=n} s_i u_{i\nu}\qquad (\nu=1, 2, \ldots, n),$$

où les quantités s_i sont des constantes. Le déterminant $\Delta(x)$ des équations (8) par rapport aux quantités s_i étant différent de zéro, les fonctions ψ_ν ne peuvent se réduire toutes identiquement à zéro que si toutes les quantités s_i s'annulent.

Une solution distinguée satisfait, par définition, aux conditions T. On aura donc

$$(10)\qquad T_k(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)=\sum_{i=1}^{i=n} s_i T_k(i)=0\qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

d'où suit que les quantités s_i ne peuvent s'annuler simultanément que si le déterminant D du système (1) par rapport aux conditions T est nul. Au contraire, si $D = 0$, le système d'équations (10) est satisfait par certaines valeurs de s_i qui ne sont pas toutes nulles simultanément, et, par suite, en substituant ces valeurs dans les formules (9), on obtient une solution distinguée. Donc, *pour que le système* (1) *admette une solution distinguée par rapport aux conditions* T, *il faut et il suffit que le déterminant* D *du système* (1) *par rapport à ces conditions s'annule.*

5. Soit $f(x)$ une fonction définie par la formule

$$f(x) = \int_a^b G^{T}_{\nu\lambda}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

où $\varphi(\xi)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b). La dérivée de cette fonction $f(x)$ s'exprime par les formules

$$(11) \qquad \begin{cases} f'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{dG^{T}_{\nu\lambda}(x, \xi)}{dx}\, \varphi(\xi)\, d\xi & (\nu \neq \lambda), \\[2ex] f'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{dG^{T}_{\nu\nu}(x, \xi)}{dx}\, \varphi(\xi)\, d\xi - \varphi(x). \end{cases}$$

On a, en effet, conformément aux formules (3), (4), (7),

$$G^{T}_{\nu\lambda}(x, \xi) = \gamma^{0}_{\nu\lambda}(x, \xi) + w_{\nu\lambda}(x, \xi),$$

où

$$\gamma^{0}_{\nu\lambda}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}\, u_{\nu\lambda}(x) \qquad (x \leqq \xi),$$

$$\gamma^{0}_{\nu\lambda}(x, \xi) = 0 \qquad (x \geqq \xi),$$

$$l_{k\nu} = v_{k\nu}(\xi), \qquad w_{\nu\lambda}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{k=n} m_{k\nu}\, u_{k\lambda}(x).$$

La fonction $\gamma^{0}_{\nu\lambda}(x, \xi)$ est donc continue en x et ξ et la fonction $w_{\nu\lambda}(x, \xi)$ l'est aussi, les coefficients $m_{k\nu}$ étant définis par les formules (6). On a donc, en désignant par $\gamma^0_{\nu\lambda}(x, x+0)$ l'expression

$$\lim_{\varepsilon=0} \gamma^0_{\nu\lambda}(x, x+\varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0),$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_x^b \gamma^0_{\nu\lambda}(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_a^b \frac{dw_{\nu\lambda}(x, \xi)}{dx}\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_x^b \frac{d}{dx}\gamma^0_{\nu\lambda}(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_a^b \frac{dw_{\nu\lambda}(x, \xi)}{dx}\varphi(\xi)\,d\xi - \gamma^0_{\nu\lambda}(x, x+0)\varphi(x)$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx}G^{T}_{\nu\lambda}(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \varphi(x)\sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}(x)\,u_{k\lambda}(x).$$

En faisant dans les équations (3) $\xi = x$, on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}(x)\,u_{k\lambda}(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda \neq \nu,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} l_{k\nu}(x)\,u_{k\nu}(x) = 1 \qquad \text{pour} \qquad \lambda = \nu,$$

d'où suivent les formules (11).

6. Nous dirons que les conditions aux limites T', définies par les formules

$$T'_k(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{i=n}\alpha'_{ki}f_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n}\beta'_{ki}f_i(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

sont *adjointes* par rapport aux conditions T, si pour tous les systèmes de fonctions $U_i(x)$ et $V_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) qui satisfont respectivement aux conditions T et T' l'expression

$$\Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} U_i(x)\,V_i(x)$$

s'annule identiquement. Nous nous proposons le problème de déterminer la forme des conditions T' qui sont les adjointes des conditions données T. L'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} U_i(x)\,V_i(x)$$

est une fonction symétrique des indices 1, 2, ..., n. On peut donc, sans diminuer la généralité des raisonnements, permuter ces indices de telle sorte que la matrice (5) contienne un déterminant d'ordre n, différent de zéro, de la forme [1]

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1,\mu} & \beta_{1,\mu+1} & \beta_{1,\mu+2} & \dots & \beta_{1,n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2,\mu} & \beta_{2,\mu+1} & \beta_{2,\mu+2} & \dots & \beta_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n,\mu} & \beta_{n,\mu+1} & \beta_{n,\mu+2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dans cette hypothèse, considérons une suite de fonctions $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$ qui satisfassent aux conditions T et résolvons les équations qui expriment ces conditions par rapport aux valeurs limites $U_1(a)$, $U_2(a)$, ..., $U_\mu(a)$, $U_{\mu+1}(b)$, $U_{\mu+2}(b)$, ..., $U_n(b)$. On aura

$$(12)\quad \begin{cases} U_k(a) + \displaystyle\sum_{i=\mu+1}^{i=n} A_{ki} U_i(a) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} B_{k\lambda} U_\lambda(b) = 0 & (k = 1, 2, \dots, \mu), \\ U_s(b) + \displaystyle\sum_{i=\mu+1}^{i=n} A_{si} U_i(a) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} B_{s\lambda} U_\lambda(b) = 0 & (s = \mu+1, \mu+2, \dots, n), \end{cases}$$

où A_{ki}, A_{si}, $B_{k\lambda}$, $B_{s\lambda}$ sont des constantes données. En choisissant un indice déterminé k' parmi les nombres 1, 2, ..., μ et en posant dans les formules (12),

$$(13)\quad \begin{cases} U_{k'}(b) = 1, \quad U_\lambda(b) = 0 & \text{pour} \quad \lambda \neq k' \quad (1 \leq \lambda \leq \mu), \\ U_i(a) = 0 & \text{pour} \quad \mu+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

on a

$$(14)\quad \begin{cases} U_k(a) + B_{kk'} = 0 & (k = 1, 2, \dots, \mu), \\ U_s(b) + B_{sk'} = 0 & (s = \mu+1, \mu+2, \dots, n). \end{cases}$$

On doit donc avoir, pour les fonctions $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$ qui, en satisfaisant aux conditions T, vérifient aussi les équations (13), (14) et pour les fonctions quelconques $V_1(x)$, $V_2(x)$, ..., $V_n(x)$,

---

[1] Dans deux cas limites ce déterminant peut être formé par tous les coefficients $\alpha_{\lambda i}$ ($\mu = n$) ou par tous les coefficients $\beta_{\lambda i}$ ($\mu = 0$), ce qui n'aurait autre effet que de simplifier les calculs.

satisfaisant aux conditions T′ adjointes (s'il y en a en général),

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b}\sum_{i=1}^{i=n} U_i(x)V_i(x) &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} U_\lambda(b)V_\lambda(b) + \sum_{s=\mu+1}^{s=n} U_s(b)V_s(b) \\ &\quad -\sum_{k=1}^{k=\mu} U_k(a)V_k(a) - \sum_{i=\mu+1}^{i=n} U_i(a)V_i(a) \\ &= V_{k'}(b) - \sum_{s=\mu+1}^{s=n} B_{sk'}V_s(b) + \sum_{k=1}^{k=\mu} B_{kk'}V_k(a) = 0. \end{aligned}\right.$$

De même, en choisissant parmi les nombres $\mu+1$, $\mu+2$, …. n un indice i' déterminé et en posant dans les formules (12)

$$U_{i'}(a)=1,\qquad U_i(a)=0\qquad \text{pour}\qquad i\neq i'\qquad (\mu+1\leq i\leq n),$$
$$U_\lambda(b)=0\qquad (\lambda=1,2,\ldots,\mu),$$

il vient

$$U_k(a)+A_{ki'}=0\qquad (k=1,2,\ldots,\mu),$$
$$U_s(b)+A_{si'}=0\qquad (s=\mu+1,\mu+2,\ldots,n),$$

d'où suit

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b}\sum_{i=1}^{i=n} U_i(x)V_i(x) &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} U_\lambda(b)V_\lambda(b) + \sum_{s=\mu+1}^{s=n} U_s(b)V_s(b) \\ &\quad -\sum_{k=1}^{k=\mu} U_k(a)V_k(b) - \sum_{i=\mu+1}^{i=n} U_i(a)V_i(a) \\ &= -\sum_{s=\mu+1}^{s=n} A_{si'}V_s(b) + \sum_{k=1}^{k=\mu} A_{ki'}V_k(a) - V_{i'}(a). \end{aligned}\right.$$

En posant dans les formules (15) successivement

$$k'=1,2,\ \ldots.\ \mu$$

et en écrivant au lieu de k', s, k respectivement k, i, λ, et, de même, en posant dans (16) successivement

$$i'=\mu+1,\mu+2,\ldots,n$$

et puis écrivant au lieu de i', s, k respectivement s, i, λ, on voit qu'on peut écrire les conditions adjointes T', s'il y en a en général, sous la forme

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{V}_k(b) - \sum\limits_{i=\mu+1}^{i=n} \mathrm{B}_{ik}\mathrm{V}_i(b) + \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \mathrm{B}_{\lambda k}\mathrm{V}_\lambda(a) = 0 & (k = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \mathrm{V}_s(a) + \sum\limits_{i=\mu+1}^{i=n} \mathrm{A}_{is}\mathrm{V}_i(b) - \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \mathrm{A}_{\lambda s}\mathrm{V}_\lambda(a) = 0 & (s = \mu+1, \mu+2, \ldots, n). \end{cases}$$

Réciproquement, en ajoutant les formules (12) et (17) respectivement avec les facteurs $-\mathrm{V}_k(a)$, $\mathrm{V}_s(b)$, $\mathrm{V}_k(b)$, $-\mathrm{V}_s(a)$, on trouve, pour deux suites quelconques de fonctions $\mathrm{U}_1(x)$, $\mathrm{U}_2(x)$, ..., $\mathrm{U}_n(x)$ et $\mathrm{V}_1(x)$, $\mathrm{V}_2(x)$, ..., $\mathrm{V}_n(x)$ qui satisfont respectivement aux conditions (12) et (17),

$$\int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{U}_i(x)\,\mathrm{V}_i(x) = 0.$$

On voit donc *qu'à chaque ensemble de conditions aux limites* T, *donné par les formules* (12), *correspond un ensemble* S' *de conditions adjointes parfaitement déterminé, défini par les formules* (17), en tant qu'on convient de considérer deux ensembles de conditions qui suivent mutuellement l'un de l'autre comme équivalents.

Il est clair que les conditions adjointes des conditions adjointes sont équivalentes aux conditions primitives. Si l'on veut écrire les conditions T et leurs adjointes sous une forme tout à fait générale, sans faire aucune hypothèse sur l'ordre des indices i des fonctions $\mathrm{U}_i(x)$, $\mathrm{V}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, on n'a qu'à remplacer les indices k, i, λ, s respectivement par ν_k, ν_i, ν_λ, ν_s, en supposant que les indices k et s parcourent respectivement les valeurs $k = 1, 2, \ldots, \mu$, $s = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, n$ et que l'ensemble d'indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu, \nu_{\mu+1}, \nu_{\mu+2}, \ldots, \nu_n$ forme une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$.

Dans deux cas limites, où l'on a $\mu = n$ ou $\mu = 0$, les formules (12) et (17) se réduisent respectivement à leurs premières ou à leurs secondes lignes.

7. En ajoutant les expressions

$$\left.\begin{aligned} L_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \frac{du_i}{dx} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{i\lambda} u_\lambda \\ M_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) &= -\frac{dv_i}{dx} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\lambda i} v_\lambda \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $a_{i\lambda}$ sont des fonctions continues de x dans l'intervalle (a, b) et où les u_i, v_i sont des fonctions qui ont des dérivées continues dans le même intervalle, multipliées respectivement par les facteurs u_i, v_i, en sommant par rapport à i et en intégrant de $x = a$ à $x = b$, on trouve la formule de Green

$$(18) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^b [v_i L_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) - u_i L_i(v_1, v_2, \ldots, v_n)]\, dx = \Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i.$$

En s'appuyant sur cette formule, on peut démontrer les propositions suivantes [1] :

a. Si le système (1) *a toutes les* n^2 *fonctions* $S^T_{\nu\lambda}(x, \xi)$ *de Green, le système adjoint* (2) *n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions adjointes* T′.

b. Si le système (2) *a toutes les* n^2 *fonctions* $H^{T'}_{\nu\lambda}(x, \xi)$ *de Green* [*en désignant par* $H^{T'}_{\nu 1}(x, \xi)$, $H^{T'}_{\nu 2}(x, \xi)$, ..., $H^{T'}_{\nu n}(x, \xi)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *les solutions de Green du système* (2) *par rapport aux conditions adjointes* T′], *le système* (1) *n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions* T.

c. Le déterminant D *du système* (1) *par rapport aux conditions* T *et le déterminant* D′ *du système adjoint* (2) *par rapport aux conditions adjointes* T′ *s'annulent simultanément ou sont simultanément différents de zéro.*

d. Pour que le système (1) *ait toutes les* n^2 *fonctions* $G^T_{\nu\lambda}(x, \xi)$ *de Green, il faut et il suffit que le déterminant* D *du système* (1) *par rapport aux conditions* T *ne s'annule pas.*

e. Si le système (1) *a toutes les* n^2 *fonctions de Green* $G^T_{\nu\lambda}(x, \xi)$

---

[1] Ces propositions offrent l'analogie et la généralisation de celles démontrées par M. W. Westfall, *loc. cit.*, § 7.

par rapport aux conditions T, *le système adjoint* (2) *a aussi toutes les* n^2 *fonctions de Green* $H^{T'}_{\nu\mu}(x, \xi)$ *par rapport aux conditions adjointes* T′. *Les fonctions* $H^{T'}_{\nu\mu}(x, \xi)$ *sont liées aux fonctions* $G^{T}(x, \xi)$ *par des relations*

$$H_{\mu\nu}(x, \xi) = - G_{\nu\mu}(x, \xi).$$

En effet, soient $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_n(x)$ les fonctions qui, ayant des dérivées continues dans l'intervalle (a, b), satisfont au système (2) et aux conditions adjointes T′. Écrivons la formule (18) deux fois, en posant

$$u_i = G^{T}_{\nu i}(x, \xi)$$

et en prenant pour limites a, $\xi - \varepsilon$ et $\xi + \varepsilon$, b, où ξ est un nombre quelconque pris dans l'intervalle (a, b); ajoutons les résultats et faisons tendre ε vers zéro. On aura

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon=0} \left[\int_{x=a}^{x=\xi-\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\, \chi_i(x) + \int_{x=\xi+\varepsilon}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\, \chi_i(x) \right] \\ &= \int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\, \chi_i(x) - \lim_{\varepsilon=0} \int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\, \chi_i(x). \end{aligned}$$

Les fonctions $G^{T}_{\nu i}(x, \xi)$ et $\chi_i(x)$ satisfaisant respectivement aux conditions T et aux conditions adjointes T′, il vient

$$\int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)\, \chi_i(x) = 0.$$

Dans la somme $\sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi)$ ce n'est que la fonction $G_{\nu\nu}(x, \xi)$ qui est discontinue pour $x = \xi$, conformément à la formule

$$\lim_{\varepsilon=0} [G_{\nu\nu}(\xi + \varepsilon, \xi) - G_{\nu\nu}(\xi - \varepsilon, \xi)] = -1.$$

On aura donc

$$-\lim_{\varepsilon=0} \int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} G_{\nu i}(x, \xi)\, \chi_i(x) = \chi_\nu(\xi) = 0,$$

où ν peut prendre toutes les valeurs $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Le théorème *a* est donc démontré.

Pour démontrer le théorème b, on n'a qu'à poser dans la formule (18)

$$u_i = \psi_i(x), \qquad v_i = \mathrm{H}^{\mathrm{T}'}_{\nu i}(x, \xi),$$

les $\psi_i(x)$ étant des fonctions qui aient des dérivées continues dans l'intervalle (a, b) et qui satisfassent de plus au système (1) et aux conditions T.

Dans l'hypothèse de $\mathrm{D} \neq 0$, les formules (7) nous assurent l'existence de toutes les n^2 fonctions $\mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu\lambda}(x, \xi)$ de Green, d'où suit, conformément au théorème a, que le système (2) n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions adjointes T'. On a donc, comme nous l'avons vu au n° 4, $\mathrm{D}' \neq 0$. De même l'hypothèse $\mathrm{D}' \neq 0$ entraîne $\mathrm{D} \neq 0$, d'où suit le théorème c.

Si le système (1) a toutes les n^2 fonctions $\mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu\lambda}(x, \xi)$ de Green, le système (2) n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions T', d'où suit que le déterminant D' est différent de zéro. On a donc aussi $\mathrm{D} \neq 0$. Réciproquement, si $\mathrm{D} \neq 0$, le système (1) a, comme nous l'avons vu plus haut, toutes les n^2 fonctions $\mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu\lambda}(x, \xi)$ de Green. Le théorème d est donc démontré.

Si le système (1) a toutes les n^2 fonctions $\mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu\lambda}(x, \xi)$ de Green, on a $\mathrm{D} \neq 0$ et, par suite, $\mathrm{D}' \neq 0$, d'où suit que le système (2) a toutes les n^2 fonctions $\mathrm{H}^{\mathrm{T}'}_{\nu\lambda}(x, \xi)$ de Green. En posant

$$u_i = \mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu i}(x, \xi), \qquad v_i = \mathrm{H}^{\mathrm{T}'}_{\mu i}(x, \eta),$$

où ξ et η sont deux nombres quelconques pris dans l'intervalle (a, b), écrivons la formule (18) trois fois pour les limites a, $\eta - \varepsilon$; $\eta + \varepsilon$, $\xi - \varepsilon$; $\xi + \varepsilon$, b [1], ajoutons les résultats et faisons tendre ε vers zéro. On aura

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon=0} \int_{x=a}^{x=\eta-\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i + \lim_{\varepsilon=0} \int_{x=\eta+\varepsilon}^{x=\xi-\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i + \lim_{\varepsilon=0} \int_{x=\xi+\varepsilon}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i \\
&= \int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu i}(x, \xi)\, \mathrm{H}^{\mathrm{T}'}_{\mu i}(x, \eta) - \lim_{\varepsilon=0} \int_{x=\eta-\varepsilon}^{x=\eta+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu i}(x, \xi)\, \mathrm{H}^{\mathrm{T}'}_{\mu i}(x, \xi) \\
&\qquad - \lim_{\varepsilon=0} \int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu i}(x, \xi)\, \mathrm{H}^{\mathrm{T}'}_{\mu i}(x, \eta).
\end{aligned}$$

---

[1] On a supposé, pour fixer les idées, $\eta < \xi$; le cas contraire donne lieu à un calcul analogue et au même résultat final.

Dans la somme $\sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi) H^{T'}_{\mu i}(x, \eta)$ deux facteurs $H^{T'}_{\mu\mu}(x, \eta)$ et $G^{T}_{\nu\nu}(x, \xi)$ qui multiplient respectivement les fonctions $G^{T}_{\nu\mu}(x, \xi)$ et $H^{T'}_{\mu\nu}(x, \eta)$ ont des discontinuités, définies par les formules

$$\lim_{\varepsilon=0}[H^{T'}_{\mu\mu}(\eta+\varepsilon, \eta) - H^{T'}_{\mu\mu}(\eta-\varepsilon, \eta)] = -1,$$
$$\lim_{\varepsilon=0}[G^{T}_{\nu\nu}(\xi+\varepsilon, \xi) - G^{T}_{\nu\nu}(\xi-\varepsilon, \xi)] = -1.$$

On a donc

$$-\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\eta-\varepsilon}^{x=\eta+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi) H^{T'}_{\mu i}(x, \eta) = G^{T}_{\nu\mu}(\eta, \xi),$$
$$-\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi) H^{T'}_{\mu i}(x, \eta) = H^{T'}_{\mu\nu}(\xi, \eta).$$

De plus, les fonctions $G^{T}_{\nu i}(x, \xi)$ et $H^{T'}_{\mu i}(x, \eta)$ satisfaisant aux conditions T et T′ adjointes, il vient

$$\int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} G^{T}_{\nu i}(x, \xi) H^{T'}_{\mu i}(x, \eta) = 0.$$

Ainsi, en faisant tendre ε vers zéro, on aura

$$H^{T'}_{\mu\nu}(\xi, \eta) + G^{T}_{\nu\mu}(\eta, \xi) = 0,$$

d'où suit, en remarquant que ξ et η ont des valeurs arbitraires dans l'intervalle (a, b),

$$H^{T'}_{\mu\nu}(x, \xi) = -G^{T}_{\nu\mu}(\xi, x).$$

On forme donc le carré des fonctions de Green $H^{T'}_{\mu\nu}(x, \xi)$ en changeant dans le carré (8) les signes des fonctions $G^{T}_{\nu\mu}(x, \xi)$ et en permutant les lignes et les colonnes, ainsi que, d'autre part, la variable x et le paramètre ξ.

8. Les fonctions $G^{T}_{\nu\nu}(x, \xi)$ de Green qui sont placées sur la diagonale du carré (8) ne sont jamais symétriques. En effet, la fonction $-G^{T}_{\nu\nu}(\xi, x)$ coïncidant avec la fonction de Green $H^{T'}_{\nu\nu}(x, \xi)$, il vient

$$-\lim_{\varepsilon=0}[G^{T}_{\nu\nu}(\xi, \xi+\varepsilon) - G^{T}_{\nu\nu}(\xi, \xi-\varepsilon)] = -1$$

ou

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} G_{\nu\nu}^{T}(\xi, x) = 1,$$

tandis que pour la fonction $G_{\nu\nu}^{T}(x, \xi)$ on a

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} G_{\nu\nu}^{T}(x, \xi) = -1.$$

L'identité

$$G_{\nu\nu}^{T}(x, \xi) = G_{\nu\nu}^{T}(\xi, x)$$

est donc impossible. Nous rencontrerons aussi plus loin (au n° **18**) un exemple simple d'une fonction de Green non symétrique avec deux indices différents.

En supposant toujours $D \neq 0$, mais sans faire aucune hypothèse sur la symétrie des fonctions de Green, nous démontrerons les propositions suivantes, qui concernent l'intégration d'un système d'équations linéaires non homogènes avec les conditions aux limites T et qui donnent, d'autre part, le moyen de résoudre certains systèmes d'équations intégrales de la première espèce.

a. Un système d'équations différentielles non homogènes

$$L_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

où les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions continues données, n'admet qu'une seule solution, formée par des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ qui satisfassent aux conditions T *et qui aient, de plus, dans l'intervalle (a, b) des dérivées continues. Cette solution unique est donnée par les formules*

$$f_\nu(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G_{i\nu}^{T}(x, \xi)\,\varphi_i(\xi)\,d\xi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

b. Un système d'équations intégrales (20) *ne peut être satisfait par les fonctions continues $\varphi_i(\xi)$ que si les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ vérifient les conditions* T *et, de plus, ont des dérivées continues dans l'intervalle (a, b). L'ensemble de ces conditions étant rempli, le système* (20) *n'a qu'une seule solution continue par rapport aux fonctions $\varphi_i(\xi)$, qui est donnée par les formules*

$$\varphi_i(x) = -L_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions $f_\nu(x)$, définies par les formules (20), satisfont aux équations (19), ce qu'on vérifie par une substitution directe, en faisant usage des formules (11). De plus, chaque groupe $G^T_{i1}(x,\xi)$, $G^T_{i2}(x,\xi)$, ..., $G^T_{in}(x,\xi)$ des fonctions de Green satisfaisant aux conditions T, les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ y satisfont aussi. En considérant une suite quelconque de fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ qui satisfassent au système (19) et aux conditions T et qui aient dans l'intervalle (a, b) des dérivées continues, on voit que les différences $F_1(x)-f_1(x)$, $F_2(x)-f_2(x)$, ..., $F_n(x)-f_n(x)$ satisfont au système (1) et aux conditions T et ont aussi des dérivées continues dans l'intervalle (a,b). Le déterminant D étant, par hypothèse, différent de zéro, le système (1) n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions T. Chacune des différences $F_\nu(x)-f_\nu(x)$ s'annule donc identiquement, d'où suit que la seule solution possible jouissant de toutes les propriétés indiquées dans le texte du théorème *a* est donnée pour le système (19) par les formules (20), ce qui achève la démonstration.

Si le système d'équations intégrales (19) peut être résolu par une suite de fonctions continues $\varphi_i(\xi)$, les fonctions $f_\nu(x)$ doivent satisfaire, comme nous l'avons vu plus haut, aux conditions T et avoir des dérivées continues, ce qu'on vérifie au moyen des formules (11). Ces conditions étant remplies par les fonctions $f_\nu(x)$, considérons un système d'équations

$$L_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = -[-L_i(f_1, f_2, \ldots, f_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans l'hypothèse que les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ satisfont aux conditions T et ont des dérivées continues dans l'intervalle (a, b), ce système n'a qu'une seule solution, donnée par les formules

$$F_\nu(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G^T_{i\nu}(x,\xi) \{-L_i[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)]\} d\xi$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

D'ailleurs, on trouve certainement cette solution, en posant $F_\nu(x) = f_\nu(x)$. On a donc

$$f_\nu(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G^T_{i\nu}(x,\xi) \{-L_i[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)]\} d\xi$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où suit que les équations intégrales (20) sont satisfaites, si l'on pose

$$\varphi_i(\xi) = -L_i[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette solution du système (20) est unique. En effet, ce système entraîne, comme nous l'avons vu plus haut, les égalités

$$\varphi_i(x) = -L_i(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Le théorème b est donc démontré.

En appliquant les théorèmes a et b au système d'équations

$$M_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -\varphi_i(x)$$

qu'on peut écrire, pour simplifier les raisonnements, sous la forme

$$-M_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -[-\varphi_i(x)],$$

et en tenant compte des identités

$$H^T_{i\nu}(x, \xi) = -G^T_{\nu i}(\xi, x),$$

on démontre les propositions suivantes (toujours dans l'hypothèse de $D \neq 0$).

c. Un système d'équations différentielles

$$M_i(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -\varphi_i(x),$$

où les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions continues données, n'admet qu'une seule solution, formée par des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ qui satisfassent aux conditions adjointes T' *et qui aient des dérivées continues dans l'intervalle (a, b). Cette solution unique est donnée par les formules*

$$(21) \qquad f_\nu(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} G^T_{\nu i}(\xi, x)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

d. Un système d'équations intégrales (21) *ne peut être satisfait par les fonctions continues $\varphi_i(\xi)$ que si les fonctions $f_\nu(x)$ vérifient les conditions adjointes* T' *et ont dans l'intervalle (a, b) des dérivées continues. Ces conditions étant remplies, le système* (21) *n'a qu'une seule solution continue par rapport aux fonctions $\varphi_i(\xi)$, qui* *est donnée par les formules*

$$\varphi_i(\xi) = -\mathrm{M}_i[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

9. En considérant la fonction $G^{T}_{\nu\mu}(x, \xi)$ comme le noyau de l'équation intégrale de la seconde espèce, désignons respectivement par $u^{(\nu,m)}_{\mu}(x)$, $v^{(\mu,m)}_{\nu}(x)$ et λ_m les antofonctions en x et en ξ [1] et l'autovaleur correspondante. Désignons aussi respectivement par $\Phi^{(\nu,m)}_{\mu}(x)$, $\Psi^{(\mu,m)}_{\nu}(x)$ et Λ_m les autofonctions adjointes en x et en ξ [1] et l'autovaleur correspondante du même noyau. Toujours en gardant ces notations, nous démontrerons, dans l'hypothèse de $D \neq 0$, les propositions suivantes qui nous permettent d'interpréter les autofonctions du noyau $G^{T}_{\nu\mu}(x, \xi)$ comme des solutions distinguées de certaines équations différentielles linéaires homogènes, où l'autovaleur λ_m (ou Λ_m) rentre comme un paramètre linéaire.

a. Considérons deux systèmes d'équations différentielles linéaires

$$(22) \quad \begin{cases} L_i(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, u^{(\nu,m)}_{\mu}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n), \\ L_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, u^{(\nu,m)}_{\mu}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = -\lambda_m u^{(\nu,m)}_{\mu} \end{cases}$$

et

$$(23) \quad \begin{cases} M_i(v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}, v^{(\mu,m)}_{\nu}, v_{\nu+1}, \ldots, v_n) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, n), \\ M_\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}, v^{(\mu,m)}_{\nu}, v_{\nu+1}, \ldots, v_n) = -\lambda_m v^{(\mu,m)}_{\nu}, \end{cases}$$

---

[1] Nous dirons que les fonctions $\varphi_m(x)$, $\chi_m(x)$ sont respectivement *autofonctions en x et en ξ* par rapport à un noyau $K(x, \xi)$, si elles satisfont aux équations

$$\varphi_m(x) = \lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi_m(\xi)\,d\xi, \qquad \chi_m(\xi) = \lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\,\chi_m(x)\,dx,$$

λ_m étant une autovaleur correspondante. De même, nous dirons que les fonctions $\Phi_m(x)$, $\Psi_m(x)$ sont respectivement des *autofonctions adjointes en x et en ξ* par rapport à un noyau $K(x, \xi)$, si elles satisfont aux équations

$$\Phi_m(x) = \Lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\,\Psi_m(\xi)\,d\xi, \qquad \Psi_m(\xi) = \Lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\,\Phi_m(x)\,dx,$$

Λ_m étant une autovaleur correspondante.

où λ_m est un paramètre variable. L'ensemble des valeurs de ce paramètre pour lesquelles le système (22) *admet une solution distinguée*

$$(24)\qquad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_{\mu-1},\quad u_\mu^{(\nu,m)},\quad u_{\mu+1},\quad \ldots,\quad u_n$$

par rapport aux conditions T, *ainsi que l'ensemble des valeurs du même paramètre pour lesquelles le système* (23) *admet une solution distinguée*

$$(25)\qquad v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_{\nu-1},\quad v_\nu^{(\mu,m)},\quad v_{\nu+1},\quad \ldots,\quad v_n$$

par rapport aux conditions adjointes T', *coïncide avec l'ensemble d'autovaleurs λ_m du noyau $G^T_{\nu\mu}(x,\xi)$. De plus, l'ensemble des fonctions $u_\mu^{\nu,m}(x)$ et $v_\nu^{(\mu,m)}(x)$, défini par les solutions distinguées* (24) *et* (25), *coïncide avec l'ensemble des autofonctions en x et en ξ du même noyau.*

b. Considérons un système de $2n$ *équations différentielles linéaires*

$$(26)\qquad \begin{cases} L_i\,(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, \Phi_\mu^{(\nu,m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n), \\ L_\nu\,(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, \Phi_\mu^{(\nu,m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = -\Lambda_m \Psi_\nu^{(\mu,m)}, \\ M_i\,(v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}, \Psi_\nu^{(\mu,m)}, v_{\nu+1}, \ldots, v_n) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, n), \\ M_\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}, \Psi_\nu^{(\mu,m)}, v_{\nu+1}, \ldots, v_n) = -\Lambda_m \Phi_\mu^{(\nu,m)}, \end{cases}$$

où Λ_m est un paramètre variable. L'ensemble des valeurs de ce paramètre pour lesquelles le système (26) *admet une solution distinguée, formée par deux séries de fonctions*

$$(27)\qquad \begin{cases} u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_{\mu-1},\quad \Phi_\mu^{(\nu,m)},\quad u_{\mu+1},\quad \ldots,\quad u_n, \\ v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_{\nu-1},\quad \Psi_\nu^{(\mu,m)},\quad v_{\nu+1},\quad \ldots,\quad v_n, \end{cases}$$

satisfaisant respectivement aux conditions T *et aux conditions adjointes* T', *coïncide avec l'ensemble des autovaleurs Λ_m du noyau $G_{\nu,\mu}(x,\xi)$. L'ensemble des fonctions $\Phi_\mu^{\nu,m}(x)$ et $\Psi_\nu^{\mu,m}(x)$, défini par les solutions distinguées* (27), *coïncide avec l'ensemble des autofonctions adjointes en x et en ξ du même noyau.*

La solution distinguée (24) donne aussi une solution d'un système non homogène

$$L_i(u_1, \ldots, u_{\mu-1}, u_\mu^{(\nu, m)}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n) = -\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n, \qquad \varphi_\nu(x) = \lambda_m u_\mu^{(\nu, m)}(x).$$

Cette solution est donnée par les fonctions (24) qui satisfont aux conditions T et qui ont, par définition, des dérivées continues dans l'intervalle (a, b). On aura donc, d'après le théorème a du n° **8**,

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_s(x) = \displaystyle\int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G_{is}^T(x, \xi)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi = \lambda_m \int_a^b G_{\nu s}^T(x, \xi)\, u_\mu^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, n), \\ u_\mu^{(\nu, m)}(x) = \lambda_m \displaystyle\int_a^b G_{\nu\mu}^T(x, \xi)\, u_\mu^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi. \end{array} \right.$$

On voit donc que la valeur du paramètre λ_m pour laquelle le système (22) admet une solution distinguée (24) est une autovaleur et que la fonction $u_\mu^{(\nu, m)}(x)$, définie par cette solution distinguée, est une autofonction correspondante en x du noyau $G_{\nu\mu}^T(x, \xi)$. Réciproquement, considérons une autofonction $u_\mu^{(\nu, m)}(x)$ en x du noyau $G_{\nu\mu}^T(x, \xi)$ et une autovaleur correspondante λ_m qui satisfont, par suite, à la dernière des équations (28). Si l'on définit les fonctions $u_s(x)$ pour les valeurs $1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, n$ de l'indice s par les formules

$$u_s(x) = \lambda_m \int_a^b G_{\nu s}^T(x, \xi)\, u_\mu^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, n),$$

on voit que le système d'équations intégrales

$$u_s(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{i=n} G_{is}(x, \xi)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

où $u_\mu(x) = u_\mu^{(\nu, m)}(x)$, est satisfait en posant

$$\varphi_i(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq \nu, \qquad \varphi_\nu(\xi) = \lambda_m u_\mu^{(\nu, m)}(\xi),$$

d'où suit, d'après le théorème b du n° **8**, que les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ ont des dérivées continues dans l'intervalle (a, b) et satisfont aux conditions T et qu'on peut trouver les mêmes solutions $\varphi_i(x)$ au moyen des formules

$$\varphi_i(x) = 0 = \mathrm{L}_i(u_1, u_2, \ldots, u_\mu^{\nu, m}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n),$$

$$\varphi_\nu(x) = -\lambda_m u_\mu^{\nu, m}(x) = \mathrm{L}_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, u_\mu^{\nu, m}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n).$$

On voit donc que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}, u_\mu^{\nu, m}, u_{\mu+1}, \ldots, u_n$, $u_\mu^{\nu, m}(x)$ étant une autofonction en x et λ_m étant une autovaleur correspondante du noyau $\mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu\mu}(x, \xi)$ forment une solution distinguée du système (22) par rapport aux conditions T. En raisonnant d'une manière analogue sur le système (23) et sur la solution (25) distinguée correspondante, on achève la démonstration du théorème a. De même, en appliquant de nouveau les théorèmes du n° **8** aux n premières puis aux n dernières équations du système (26) et à la solution distinguée (27), on démontre le théorème b.

10. Dans l'hypothèse $\mathrm{D} \neq 0$, on démontre, en s'appuyant sur un théorème de M. Schmidt, les propositions suivantes :

a. Les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ *qui ont des dérivées continues dans l'intervalle* (a, b) *et qui satisfont au système de* $n - 1$ *équations*

$$\mathrm{L}_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, n)$$

et aux conditions T *sont développables en séries absolument et uniformément convergentes de la forme*

$$u_s(x) = \sum_m \Phi_s^{\nu, m}(x) \int_a^b u_s(\xi)\, \Phi_s^{\nu, m}(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

procédant respectivement suivant les autofonctions en x *adjointes des noyaux* $\mathrm{G}^{\mathrm{T}}_{\nu s}(x, \xi)$.

b. Les fonctions $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ *qui ont des dérivées continues dans l'intervalle* (a, b) *et qui satisfont au système de* $n - 1$

équations

$$M_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n)$$

et aux conditions adjointes T′ *sont développables en séries absolument et uniformément convergentes de la forme*

$$v_s(x) = \sum_m \Psi_s^{(\nu, m)}(x) \int_a^b v_s(\xi) \Psi_s^{(\nu, m)}(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

procédant respectivement suivant les autofonctions en ξ *adjointes des noyaux* $G_{s\nu}^T(x, \xi)$.

En effet, en désignant l'expression $L_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par $\chi_\nu(x)$, on voit que les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ satisfont au système non homogène

$$\begin{aligned} &L_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n),\\ &L_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \chi_\nu(x) \end{aligned}$$

et aux conditions aux limites T, et ont, de plus, des dérivées continues dans l'intervalle (a, b), d'où suit, conformément à la formule (20) du nº **8**,

$$u_s(x) = \int_a^b G_{\nu s}^T(x, \xi)\, \chi_\nu(\xi)\, d\xi \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

La fonction $u_s(x)$ se développe donc, d'après un théorème de M. Schmidt [1], dans une série absolument et uniformément convergente, procédant suivant les autofonctions adjointes $\Phi_s^{(\nu, m)}(x)$ du noyau $G_{\nu s}^T(x, \xi)$. On démontre de même, en s'appuyant sur la formule (20), le théorème b. Si la fonction $G_{\nu s}^T(x, \xi)$ de Green est symétrique, les développements des théorèmes a et b se transforment en des séries procédant suivant les autofonctions $u_s^{(\nu, m)}(x)$.

11. Nous nous proposons maintenant d'entreprendre l'étude des propriétés de la fonction de Green d'une expression différentielle linéaire homogène $Z(u)$ de l'ordre n. Considérons à cet effet un sys-

---

[1] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen*, § 16 (*Math. Ann.*, Bd. LXIII, 1907).

tème d'équations différentielles

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx}-u_2=0,\qquad \dfrac{du_2}{dx}-u_3=0,\qquad \ldots,\\ \dfrac{du_k}{dx}-u_{k+1}=0,\qquad \ldots,\qquad \dfrac{du_{n-1}}{dx}-u_n=0,\\ \dfrac{du_n}{dx}+\dfrac{p_n}{p}u+\dfrac{p_{n-1}}{p}u_2+\ldots+\dfrac{p_2}{p}u_{n-1}+\dfrac{p_1}{p}u_n=0, \end{array}\right.$$

où p est une fonction qui a n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b) et où $p_k(k=2, 3, \ldots, n-1)$ est une fonction qui a $n-k$ dérivées successives continues dans le même intervalle. De plus, nous supposons que la fonction $p_n(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et que la fonction $p(x)$ est différente de zéro dans cet intervalle. En convenant de regarder l'inconnue u dans le système (29) comme équivalente avec u_1 dans le système (1) et en appliquant la formule (7) du n° **5**, construisons pour le système (29) une fonction de Green $G^T_{n1}(x, \xi)$ par rapport aux conditions T, dans l'hypothèse que le déterminant D du système (29) par rapport à ces conditions n'est pas nul. Les $n-1$ premières équations du système (29) nous donnent

$$(30)\qquad u_2=u',\qquad \ldots,\qquad u_i=u^{(i-1)},\qquad \ldots,\qquad u_n=u^{(n-1)},$$

et, par suite, la dernière équation de ce système peut s'écrire sous la forme

$$(31)\qquad u^{(n)}+\frac{p_1}{p}u^{(n-1)}+\ldots+\frac{p_{n-1}}{p}u'+\frac{p_n}{p}u=0.$$

On obtient donc dans le cas considéré les n solutions indépendantes du système (29) au moyen d'un système fondamental $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ des solutions de l'équation (30), en posant, conformément aux notations du n° **5**,

$$(32)\qquad u_{k1}=u_k,\qquad u_{ki}=u_k^{(i-1)}\qquad (i=2, 3, \ldots, n).$$

La fonction cherchée $G^T_{n1}(x, \xi)$ s'exprime par les formules

$$G^T_{n1}(x, \xi)=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k(x)\sum_{i=1}^{i=n} D_k(b_i)\,v_{in}(\xi)}{D}\qquad (x \,\overline{\gtrless}\, \xi),$$

$$G^T_{n1}(x, \xi)=-\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k(x)\sum_{i=1}^{i=n} D_k(a_i)\,v_{in}(\xi)}{D}\qquad (x \,\overline{\gtrless}\, \xi),$$

où

$$v_{in}(x) = \frac{[u_i^{(n-1)}]}{\Delta},$$

en désignant, en général, par $[u_i^{(\nu-1)}]$ le complément algébrique de l'élément $u_i^{(\nu-1)}$ du déterminant

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u'_1 & \dots & u_1^{(n-1)} \\ u_2 & u'_2 & \dots & u_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ u_n & u'_n & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Pour calculer les déterminants D, $D_k(ai)$, $D_k(bi)$ dans le cas considéré on n'a qu'à appliquer les formules du n° **5**, en tenant compte des relations (32). On voit donc, en introduisant les désignations

$$C_k(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} f^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} f^{(i-1)}(b),$$

$$f^{(0)}(a) = f(a), \qquad f^{(0)}(b) = f(b),$$

$$C_{ak}(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} f^{(i-1)}(a), \qquad C_{bk}(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} f^{(i-1)}(b),$$

$$C_k(u_\nu) = C_k(\nu), \qquad C_{ak}(u_\nu) = C_{ak}(\nu), \qquad C_{bk}(u_\nu) = C_{bk}(\nu),$$

qu'on aura les expressions cherchées de D, $D_k(ai)$, $D_k(bi)$, en remplaçant dans les formules correspondantes du n° **5** la lettre T par le symbole C. Les fonctions $G_{n2}^T(x, \xi)$, $G_{n3}^T(x, \xi)$, ..., $G_{nn}^T(x, \xi)$, qui forment avec la fonction $G_{n1}^T(x, \xi)$ une solution de Green

$$u = G_{n1}^T(x, \xi), \qquad u_2 = G_{n2}^T(x, \xi), \qquad \dots, \qquad u_n = G_{nn}^T(x, \xi)$$

du système (23) par rapport aux conditions T, se déduisent immédiatement de la fonction $G_{n1}^T(x, \xi)$. En effet, la solution de Green satisfaisant au système (23), on a

$$G_{ni}^T(x, \xi) = \frac{d^{i-1} G^T(x, \xi)}{dx^{i-1}} \qquad (i = 2, 3, \dots, n),$$

et l'on voit, de plus, que la fonction $G_{n1}^T(x, \xi)$ satisfait à l'équation (31) ou à l'équation équivalente

$$(33) \qquad pu^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0.$$

La solution de Green

$$G^{T}_{ni}(x, \xi) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfait aux conditions T. On a donc, conformément aux notations adoptées,

$$\begin{gathered}
T_k[G^{T}_{n1}(x, \xi), G^{T}_{n2}(x, \xi), \ldots, G^{T}_{nn}(x, \xi)] \\
= \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} \frac{d^{i-1}G(x, \xi)}{dx^{i-1}} + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} \frac{d^{i-1}G(x, \xi)}{dx^{i-1}} = C_k[G^{T}_{n1}(x, \xi)] = 0 \\
(i = 1, 2, \ldots, n),
\end{gathered}$$

d'où suit que la fonction $G^{T}_{n1}(x, \xi)$ satisfait à n conditions de la forme

$$C_k(f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

dont nous désignerons l'ensemble par C.

Par définition de la solution de Green, les fonctions $G^{T}_{ni}(x, \xi)$ sont continues dans l'intervalle (a, b) pour les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$ de l'indice i; mais la fonction $G^{T}_{nn}(x, \xi)$, en étant continue dans les intervalles (a, ξ), (ξ, b), satisfait à la condition

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon=0} [G^{T}_{nn}(\xi + \varepsilon, \xi) - G^{T}_{nn}(\xi - \varepsilon, \xi)] \\
&\quad = \lim_{\varepsilon=0} \left[\Big/^{x=\xi+\varepsilon} \frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}} - \Big/^{x=\xi-\varepsilon} \frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}} \right] = -1.
\end{aligned}$$

La fonction $G^{T}_{n1}(x, \xi)$ a donc les propriétés suivantes : elle satisfait à l'équation (33) et aux conditions linéaires homogènes C qui lient les valeurs aux limites de cette fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$; la fonction $G^{T}_{n1}(x, \xi)$ et ses dérivées $\frac{d^{i}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{i}}$ jusqu'à l'ordre $n-2$ sont continues dans l'intervalle (a, b), mais la dérivée $\frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}}$, étant continue dans les intervalles (a, ξ), (ξ, b), satisfait à la condition

$$\lim_{\varepsilon=0} \left[\Big/^{x=\xi+\varepsilon} \frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}} - \Big/^{x=\xi-\varepsilon} \frac{d^{n-1}G^{T}_{n1}(x, \xi)}{dx^{n-1}} \right] = -1.$$

On obtient donc, en divisant la fonction $G^{T}_{n1}(x, \xi)$ par $p(\xi)$, *la* *fonction de l'expression*

$$L(u) = pu^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u$$

par rapport aux conditions C (¹). En désignant cette fonction de Green par $G^C(x, \xi)$, on aura

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} G^C(x,\xi) &= \frac{\sum_{k=1}^{k=n} u_k(x) \sum_{i=1}^{i=n} D_k(bi)\, v_i(\xi)}{D} \qquad (x \leqq \xi), \\ G^C(x,\xi) &= -\frac{\sum_{k=1}^{k=n} u_k(x) \sum_{i=1}^{i=n} D_k(ai)\, v_i(\xi)}{D} \qquad (x \geqq \xi), \end{aligned} \right.$$

où

$$v_i(\xi) = \frac{v_{in}(\xi)}{p(\xi)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le dénominateur D des formules (34) se déduit de l'expression de D au n° **5** en remplaçant, comme il est indiqué plus haut, la lettre T par le symbole C; on désignera donc le déterminant D dans ce cas par *un déterminant de l'équation* (33) *par rapport aux conditions* C (²).

12. Soient

$$L(u) = pu^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u$$

une expression différentielle linéaire et

$$M(v) = (-1)^n \frac{d^n(pv)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(pv)}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1) \frac{d(p_{n-1} v)}{dx} + p_n v$$

une expression différentielle adjointe par rapport à $L(u)$. Si les fonc-

---

(¹) *Cf.* M. Bôcher, *loc. cit.* Nous désignerons la fonction

$$G_m^T(x, \xi) = G^C(x, \xi)\, p(\xi)$$

par une fonction de Green de l'équation

$$L(u) = 0$$

par rapport aux conditions C.

(²) *Cf.* W. Westfall, *loc. cit.*, § 7, *Bedingungsdeterminante.*

tions u, v et p ont n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b) et si les fonctions $p_k (k = 2, 3, \ldots, n-1)$ ont respectivement $n-k$ dérivées successives continues, on aura, comme il est bien connu, la formule de Green

$$\int_a^b [v\,\mathrm{L}(u) - u\,\mathrm{M}(v)]\,dx = \Big/_{x=a}^{x=b} \mathrm{P}(u, v),$$

où

$$\mathrm{P}(u, v) = \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^h u^{(k-h-1)} \frac{d^h}{dx^h}(p_k v).$$

En posant

$$u = u_1, \qquad u^{(i-1)} = u_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

$$pv = v_n,$$

$$-\frac{d(pv)}{dx} + p_1 v = v_{n-1},$$

$$\frac{d^2(pv)}{dx^2} - \frac{d(p_1 v)}{dx} + p_2 v = v_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(pv)}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}(p_1 v)}{dx^{n-2}} + \ldots + (-1)\frac{d(p_{n-2} v)}{dx} + p_{n-1} v = v_1,$$

on peut écrire la formule de Green sous la forme

$$(35) \qquad \int_a^b [v\,\mathrm{L}(u) - u\,\mathrm{M}(v)]\,dx = \Big/_{x=a}^{x=b} \mathrm{P}(u, v) = \Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} u_i v_i.$$

15. Soit $\mathrm{U}(x)$ une fonction qui satisfasse aux conditions

$$\mathrm{C}_k(\mathrm{U}) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} \mathrm{U}^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} \mathrm{U}^{(i-1)}(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

En écrivant U_1 au lieu de U et U_i au lieu de $\mathrm{U}^{(i-1)} (i = 2, \ldots, n)$, on obtient l'ensemble correspondant T de conditions

$$\mathrm{T}_k(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} \mathrm{U}_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} \mathrm{U}_i(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

satisfaites par les fonctions $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n$. Considérons maintenant les fonctions $V_1, V_2, \ldots, V_n$ qui satisfont aux conditions T', adjointes de T. On aura, en désignant, comme au n° **6**, les coefficients des conditions T' par $\alpha'_{ki}, \beta'_{ki}$,

$$(36)\qquad \begin{cases} T'_k(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha'_{ki} V_i(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki} V_i(b) = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

En posant dans les formules (36)

$$(37)\qquad \begin{cases} V_n \quad = pV, \\ V_{n-1} = -\dfrac{d(pV)}{dx} + p_1 V, \\ V_{n-2} = \dfrac{d^2(pV)}{dx^2} - \dfrac{d(p_1 V)}{dx} + p_2 V, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_1 \quad = (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}(pV)}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-2}\dfrac{d^{n-2}(p_1 V)}{dx^{n-2}} + \ldots \\ \qquad\qquad + (-1)\dfrac{d(p_{n-2} V)}{dx} + p_{n-1} V, \end{cases}$$

où V et p sont des fonctions qui ont des dérivées parfaitement définies jusqu'à l'ordre $n-1$ pour $x = a$ et $x = b$ et où les fonctions $p_k (k = 1, 2, \ldots, n-2)$ ont pour les mêmes valeurs de x des dérivées parfaitement définies respectivement jusqu'à l'ordre $n-k-1$, il vient

$$T'_k(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{i=n} P_{ki} V^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} Q_{ki} V^{(i-1)}(b) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

où P_{ki} et Q_{ki} sont des coefficients parfaitement déterminés qui dépendent des quantités $\alpha'_{ki}, \beta'_{ki}$ et des valeurs des fonctions $p, p_1, \ldots, p_{n-1}$ et de leurs dérivées de divers ordres pour $x = a$ et pour $x = b$. En introduisant la désignation

$$C'_k(f) = \sum_{i=1}^{i=n} P_{ki} f^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} Q_{ki} f^{(i-1)}(b) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

nous convenons de dire que les conditions de la forme

$$C'_k(f) = \sum_{i=1}^{i=n} P_{ki} f^{(i-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=n} Q_{ki} f^{(i-1)}(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

dont nous désignerons l'ensemble par C', sont *adjointes* par rapport aux conditions C. Pour chaque couple de fonctions U et V qui satisfont respectivement aux conditions C et C' le second membre $\int_{x=a}^{x=b} P(U, V)$ de la formule (35) s'annule identiquement. En effet, conformément à la formule (35), on a

$$\int_{x=a}^{x=b} P(U, V) = \int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} U_i V_i,$$

où $U_1 = U$, $U_i = U^{(i-1)}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ et où les fonctions V_i sont définies par les formules (37). Les fonctions U et V satisfaisant respectivement aux conditions C et C', on a identiquement

$$\left.\begin{aligned} C_k(U) &= T_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) = 0 \\ C'_k(V) &= T'_k(V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où suit que les fonctions U_i et V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfont respectivement à deux ensembles de conditions T et T' mutuellement adjointes. On a donc

$$\int_{x=a}^{x=b} P(U, V) = \int_{x=a}^{x=b} \sum_{i=1}^{i=n} U_i V_i = 0.$$

14. Une fonction $u = \psi(x)$ qui satisfait à l'équation (33) se nomme *une solution distinguée de l'équation* (33) *par rapport aux conditions* C, si cette fonction ne se réduit pas identiquement à zéro et si elle admet dans l'intervalle (a, b) des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. Pour que l'équation (33) admette par rapport aux conditions C une solution distinguée, il faut et il suffit que le déterminant de cette équation par rapport aux conditions C s'annule [1].

---

[1] W. Westfall, *loc. cit.*, § 7.

Soient

$$L(u) = pu^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u$$

une expression différentielle, où les fonctions p et $p_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ satisfont aux restrictions du n° **11** (¹), et

$$M(v) = (-1)^n \frac{d^n(pv)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(pv)}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1) \frac{d(p_{n-1} v)}{dx} + p_n v$$

l'expression adjointe correspondante. En désignant le déterminant de l'équation $L(u) = 0$ par rapport aux conditions C et le déterminant de l'équation $M(v) = 0$ par rapport aux conditions C′ respectivement par D_C et $D_{C'}$, nous nous proposons de démontrer les propositions suivantes :

a. Si l'expression différentielle $L(u)$ *a une fonction* $G^C(x, \xi)$ *de Green par rapport aux conditions* C, *l'équation* $M(v) = 0$ *n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions adjointes* C′.

b. Si l'expression adjointe $M(v)$ *a une fonction* $H^{C'}(x, \xi)$ *de Green par rapport aux conditions adjointes* C′, *l'équation* $L(u) = 0$ *n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions* C.

c. Le déterminant D_C *de l'équation* $L(u) = 0$ *par rapport aux conditions* C *et le déterminant* $D_{C'}$ *de l'équation* $M(v) = 0$ *par rapport aux conditions* C′ *sont simultanément égaux à zéro ou différents de zéro.*

d. Pour que l'expression $L(u)$ *ait une fonction* $G^C(x, \xi)$ *de Green par rapport aux conditions* C, *il faut et il suffit que le déterminant* D_C *de l'équation* $L(u) = 0$ *par rapport aux conditions* C *soit différent de zéro.*

e. Si l'expression $L(u)$ *a une fonction de Green* $G^C(x, \xi)$ *par rapport aux conditions* C, *l'expression adjointe* $M(v)$ *a une fonction de Green* $H^{C'}(x, \xi)$ *par rapport aux conditions* C′ *qui est liée avec la fonction* $G^C(x, \xi)$ *au moyen de la relation*

$$H^{C'}(x, \xi) = G^C(\xi, x).$$

Soient $\chi(x)$ une fonction qui, en satisfaisant à l'équation $M(v) = 0$ et

---

(¹) Nous ne considérerons dans la suite que des expressions différentielles linéaires qui satisfassent à ces restrictions.

aux conditions C′, admette, dans l'intervalle (a, b), n dérivées continues successives, et ξ un nombre quelconque, pris dans le même intervalle. En posant dans la formule (35)

$$u = G^{C}(x, \xi), \qquad v = \chi(x),$$

écrivons-la deux fois respectivement pour les intervalles $(a, \xi - \varepsilon)$, $(\xi + \varepsilon, b)$, ajoutons les résultats et faisons tendre ε vers zéro. Les fonctions u et v satisfont dans le cas considéré respectivement aux conditions C et C′, d'où suit l'identité

$$\int_{x=a}^{x=b} P(u, v) = 0.$$

On aura donc, en tenant compte de la discontinuité du terme $u^{(n-1)}pv$ pour $x = \xi$ dans le second membre,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \{\chi(x)\, L[G(x, \xi)] - G(x, \xi)\, M[\chi(x)]\}\, dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} \frac{d^{n-1} G^{C}(x, \xi)}{dx^{n-1}}\, p(x)\, \chi(x) = \chi(\xi), \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème a. On démontre le théorème b d'une manière analogue, en posant dans la formule (35)

$$u = \psi(x), \qquad v = H^{C'}(x, \xi),$$

où $\psi(x)$ est une fonction qui, en satisfaisant à l'équation $L(u) = 0$ et aux conditions C, admet, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues.

Si le déterminant D_C est différent de zéro, l'expression $L(u)$ a, conformément à la formule (34), une fonction de Green $G^{C}(x, \xi)$. L'équation $M(v) = 0$ n'a donc pas, d'après le théorème a, de solution distinguée par rapport aux conditions adjointes C′, d'où suit que le déterminant $D_{C'}$ n'est pas nul.

De même, l'hypothèse $D_{C'} \neq 0$ entraîne $D_C \neq 0$, ce qui démontre le théorème c.

Si l'expression $L(u)$ a une fonction $G^{C}(x, \xi)$ de Green, l'équation $M(v) = 0$ n'a pas de solution distinguée par rapport aux conditions C′. Le déterminant D_C est donc différent de zéro et, en vertu du théorème c, le déterminant D_C est aussi différent de zéro. Réciproquement, si le déterminant D_C est différent de zéro, l'expression $L(u)$ a la fonction $G^C(x, \xi)$ de Green, comme le montre la formule (34), d'où suit le théorème d.

Si l'expression $L(u)$ a une fonction $G^C(x, \xi)$ de Green, le déterminant D_C est différent de zéro et, par suite, le déterminant $D'_{C'}$ l'est aussi, d'où suit l'existence de la fonction de Green $H^{C'}(x, \xi)$ de l'expression $M(v)$ par rapport aux conditions C'. Posons dans la formule (35)

$$u = G^C(x, \xi), \qquad v = H^{C'}(x, \eta),$$

ξ et η étant deux nombres quelconques, pris dans l'intervalle (a, b). Les fonctions u et v satisfont dans le cas considéré respectivement aux conditions C et C', d'où suit l'identité

$$\Big/_{x=a}^{x=b} P(u, v) = 0.$$

On aura donc, en remarquant que la fonction $H^{C'}(x, \eta)$ est égale à la fonction de Green de l'équation $M(v) = 0$ par rapport aux conditions C', divisée par $(-1)^n p(x)$,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b \{ H^{C'}(x, \eta)\, L[G^C(x, \xi)] - G^C(x, \xi)\, M[H^{C'}(x, \eta)] \}\, dx \\
&= -\lim_{\varepsilon=0} \Big/_{x=\eta-\varepsilon}^{x=\eta+\varepsilon} (-1)^{n-1} G^C(x, \xi)\, p(x) \frac{d^{n-1} H^{C'}(x, \eta)}{dx^{n-1}} \\
&\quad - \lim_{\varepsilon=0} \Big/_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} H^{C'}(x, \eta)\, p(x) \frac{d^{n-1} G^C(x, \xi)}{dx^{n-1}} \\
&= (-1)^{2n-1} G^C(\eta, \xi) + H^{C'}(\xi, \eta),
\end{aligned}$$

d'où suit

$$H^{C'}(\xi, \eta) = G^C(\eta, \xi)$$

ou

$$H^{C'}(x, \xi) = G^C(\xi, x) \quad (^1).$$

15. Soit $\varphi(\xi)$ une fonction continue. Les n dérivées successives de la fonction

$$f(x) = \int_a^b G^C(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

---

(1) M. Bôcher, *loc. cit.*

où $G^C(x, \xi)$ est une fonction de Green de l'expression $L(u)$ par rapport aux conditions C, s'expriment par les formules

$$(38)\qquad \begin{cases} f^{(i)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{d^i\, G^C(x,\xi)}{dx^i}\,\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ f^{(n)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{d^n\, G^C(x,\xi)}{dx^n}\,\varphi(\xi)\,d\xi - \frac{\varphi(x)}{p(x)}. \end{cases}$$

De même, n dérivées successives de la fonction

$$F(x) = \int_a^b H^{C'}(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \int_a^b G^C(\xi, x)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

où $H^{C'}(x, \xi)$ est une fonction de Green de l'expression adjointe $M(v)$ par rapport aux conditions adjointes C′, sont données par les formules

$$(39)\qquad \begin{cases} F^{(i)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{d^i\, H^{C'}(x,\xi)}{dx^i}\,\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ F^{(n)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{d^n\, H^{C'}(x,\xi)}{dx^n}\,\varphi(\xi)\,d\xi - (-1)^n \frac{\varphi(x)}{p(x)}. \end{cases}$$

On démontre les formules (38) en partant immédiatement de la définition de la fonction $G^C(x, \xi)$ de Green [1]; on peut aussi les obtenir en s'appuyant sur les formules (11) du n° **5** et sur les relations du n° **11** :

$$\frac{d^i\, G^C(x,\xi)}{dx^i} = \frac{d^i\, G^T_{n1}(x,\xi)}{dx^i}\,\frac{1}{p(\xi)} = \frac{G^T_{n,i+1}(x,\xi)}{p(\xi)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\frac{d^n\, G^C(x,\xi)}{dx^n} = \frac{d\, G^T_{nn}(x,\xi)}{dx}\,\frac{1}{p(\xi)}.$$

On démontre d'une manière analogue les formules (39), en ayant en vue que le coefficient de $v^{(n)}$ dans l'expression $M(v)$ est égal à $(-1)^n p(x)$.

16. Toujours en supposant le déterminant D_C différent de zéro, nous nous proposons de démontrer les propositions suivantes.

---

(1) W. Westfall, *loc. cit.*, § 6.

a. L'équation linéaire non homogène

$$L(f) = -\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction continue, n'a qu'une seule solution par rapport à f qui, en satisfaisant aux conditions C, admette, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues. Cette solution est donnée par la formule [1]

$$f(x) = \int_a^b G^C(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{40}$$

Réciproquement, une équation intégrale (40) n'a de solution continue par rapport à $\varphi(\xi)$ que si la fonction $f(x)$, en satisfaisant aux conditions C, a, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues. L'ensemble de ces conditions étant rempli, l'équation (40) n'a qu'une seule solution continue par rapport à $\varphi(\xi)$, qui est donnée par la formule

$$\varphi(\xi) = -L[f(\xi)].$$

b. De même, l'équation linéaire non homogène

$$M(F) = -\varphi(x)$$

n'a qu'une seule solution par rapport à F qui, en satisfaisant aux conditions adjointes C', admette, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues. Cette solution est donnée par la formule

$$F(x) = \int_a^b G^C(\xi, x)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Réciproquement, cette dernière formule, regardée comme une équation intégrale, n'a de solution continue par rapport à $\varphi(\xi)$ que si la fonction $F(x)$, en satisfaisant aux conditions C', admet, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues. L'ensemble de ces conditions étant rempli, on n'a qu'une seule solution continue par rapport à $\varphi(\xi)$, qui est donnée par la formule

$$\varphi(\xi) = -M[F(\xi)].$$

---

(1) M. Bôcher, *loc. cit.*

c. L'ensemble des valeurs du paramètre λ_m, pour lesquelles l'équation

$$L(\varphi_m) + \lambda_m \varphi_m = 0$$

a une solution distinguée φ_m par rapport aux conditions C, tout de même que l'ensemble des valeurs du paramètre λ_m, pour lesquelles l'équation

$$M(\psi_m) + \lambda_m \psi_m = 0$$

a une solution distinguée ψ_m par rapport aux conditions adjointes C′, coïncide avec l'ensemble des autovaleurs du noyau $G^c(x, \xi)$. Les ensembles de solutions distinguées φ_m et ψ_m coïncident respectivement avec les ensembles des autofonctions en x et en ξ du même noyau $G^c(x, \xi)$.

d. L'ensemble des valeurs du paramètre Λ_m, pour lesquelles le système

$$L(\Phi_m) + \Lambda_m \Psi_m = 0, \qquad M(\Psi_m) + \Lambda_m \Phi_m = 0$$

admet une solution distinguée, formée des fonctions Φ_m et Ψ_m qui satisfont respectivement aux conditions C et aux conditions adjointes C′, coïncide avec l'ensemble des autovaleurs du noyau $G^c(x, \xi)$ correspondant aux autofonctions adjointes. Les ensembles de solutions distinguées Φ_m et Ψ_m coïncident respectivement avec les ensembles d'autofonctions adjointes en x et en ξ du même noyau $G^c(x, \xi)$.

e. Chaque fonction $f(x)$ qui, en ayant n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b), satisfait de plus aux conditions C est développable en une série absolument et uniformément convergente de la forme

$$f(x) = \sum_m \Phi_m(x) \int_a^b f(\xi)\, \Phi_m(\xi)\, d\xi,$$

procédant suivant les autofonctions adjointes en x du noyau $G^c(x, \xi)$.

De même, chaque fonction $F(x)$ qui, en ayant n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b), satisfait de plus aux conditions adjointes C′ est développable en une série absolument et uni-

formément convergente de la forme

$$F(x) = \sum_m \Psi_m(x) \int_a^b f(\xi) \Psi_m(\xi)\, d\xi,$$

procédant suivant les autofonctions adjointes en ξ *du noyau* $G^C(x, \xi)$.

On pourrait envisager ces théorèmes comme les corollaires des théorèmes correspondants des nos **8**, **9**, **10**, en remplaçant l'équation

$$L(f) = -\varphi(x)$$

par le système

$$\frac{df}{dx} - f_2 = 0, \qquad \frac{df_2}{dx} - f_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df_{n-1}}{dx} - f_n = 0.$$

$$L(f) = p\frac{df_n}{dx} + p_1 f_n + \ldots + p_{n-1} f_2 + p_n f = -\varphi(x).$$

Mais une démonstration directe n'est pas moins simple. On obtient la première partie du théorème a, si l'on vérifie au moyen des formules (38) l'identité

$$L\left[\int_a^b G^C(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\right] = -\varphi(x),$$

en ayant en vue que la fonction $G^C(x, \xi)$ même satisfait aux conditions C et que la solution cherchée par rapport à $f(x)$, en vertu de l'hypothèse $D_C \neq 0$, est nécessairement unique. L'équation

$$L(u) = [-L(f)],$$

où $f(x)$ est une fonction qui a, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues et qui satisfait aux conditions C, admet une solution évidente $u = f(x)$, ayant la même propriété d'admettre n dérivées successives continues et de satisfaire aux conditions C. En exprimant une telle solution, qui est d'ailleurs unique, au moyen de la formule (40), on a

$$f(x) = \int_a^b G^C(x, \xi) \{-L[f(\xi)]\}\, d\xi,$$

d'où suit que la formule (40), considérée comme équation intégrale, est résolue en posant

$$\varphi(\xi) = -L[f(\xi)].$$

Cette solution est la seule possible. En effet, on déduit de (40), au moyen des formules (38),

$$L[f(x)] = -\varphi(x).$$

En tenant compte de l'identité

$$H^{G}(x, \xi) = G^{G}(\xi, x),$$

on voit que le théorème b n'est qu'un cas spécial du théorème a. On démontre le théorème c en cherchant, au moyen de la formule (40), des solutions u, v des équations non homogènes

$$L(u) = -\lambda_m \varphi_m, \qquad M(v) = -\lambda_m \psi_m$$

qui admettent, dans l'intervalle (a, b), n dérivées successives continues et qui satisfassent respectivement aux conditions C et C', et en remarquant que ces solutions coïncident respectivement avec les solutions distinguées φ_m et ψ_m; pour achever la démonstration, il faut appliquer les réciproques des théorèmes a, b aux équations intégrales homogènes qui lient les autofonctions φ_m et ψ_m, l'autovaleur λ_m et le noyau $G^{G}(x, \xi)$. On démontre de même le théorème d en partant des équations non homogènes

$$L(u) = -\Lambda_m \Psi_m, \qquad M(v) = -\Lambda_m \Phi_m.$$

Le théorème e se déduit d'un théorème de M. Schmidt [1], en remarquant qu'on peut toujours résoudre les équations intégrales

$$f(x) = \int_a^b G^{G}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad F(x) = \int_a^b G^{G}(\xi, x)\, \chi(\xi)\, d\xi$$

par rapport aux fonctions $\varphi(\xi)$, $\chi(\xi)$, si l'ensemble de conditions indiqué dans le texte du théorème e est respectivement rempli par les fonctions $f(x)$ et $F(x)$. Si la fonction de Green $G^{G}(x, \xi)$ est symétrique, les séries du théorème e se transforment en développements procédant suivant les autofonctions $\varphi_m(x)$ du noyau $G^{G}(x, \xi)$.

17. En supposant toujours que D_G soit différent de zéro, nous allons

(1) E. Schmidt, *loc. cit.*

maintenant chercher les conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction de Green $G^c(x, \xi)$ de l'expression donnée $L(u)$, dont les coefficients p, p_k satisfont aux restrictions du n° **11**, soit symétrique. A cet effet, nous démontrerons une proposition auxiliaire suivante :

Si la fonction $G^c(x, \xi)$ *de Green de l'expression* $L(u)$ *par rapport aux conditions* C *est symétrique, les conditions* C *et les conditions* C′ *sont équivalentes, c'est-à-dire chaque fonction qui satisfait aux conditions* C *doit satisfaire aussi aux conditions* C′, *et réciproquement.*

En effet, soit $f(x)$ une fonction qui ait n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b) et qui satisfasse aux conditions C. D'après le théorème a du n° **16**, on peut présenter la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \int_a^b G^c(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

où $\varphi(\xi)$ est une fonction continue. On a donc aussi, en supposant que la fonction $G^c(x, \xi)$ soit symétrique,

$$f(x) = \int_a^b G^c(\xi, x)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

où la fonction $G^c(\xi, x)$, d'après le théorème e du n° **14**, satisfait aux conditions adjointes C′, d'où suit que la fonction $f(x)$ elle-même satisfait aux conditions C′. On démontre d'une manière analogue qu'une fonction $f(x)$ qui a n dérivées successives continues dans l'intervalle (a, b) et qui satisfait aux conditions C′ doit satisfaire aussi, dans l'hypothèse de la symétrie de la fonction $G^c(x, \xi)$, aux conditions C. Soit maintenant $f(x)$ une fonction quelconque qui satisfasse aux conditions C. En nous appuyant sur la formule interpolatrice de Cauchy, construisons un polynome $F(x)$ qui satisfasse aux équations

$$(41) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} F(a) = f(a), & F^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \\ F(b) = f(b), & F^{(i)}(b) = f^{(i)}(b) \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si la fonction $G^c(x, \xi)$ de Green est symétrique, la fonction $F(x$

ayant n dérivées successives continues et satisfaisant, en vertu des relations (41), aux conditions C, doit satisfaire aux conditions C′, d'où l'on déduit, en faisant de nouveau usage des formules (41), que la fonction $f(x)$ satisfait aussi aux conditions C′. On démontre de même que chaque fonction $f(x)$, satisfaisant aux conditions C′, satisfait aussi aux conditions C.

18. Théorème. — *Pour que la fonction* $G^C(x, \xi)$ *de Green de l'expression* L(u) *par rapport aux conditions* C *soit symétrique, il faut et il suffit que l'expression* L(u) *soit auto-adjointe* (¹) *et que les conditions* C *soient* greeniennes (²), *c'est-à-dire telles que pour chaque couple de fonctions* $u = f$, $v = F$, *satisfaisant aux conditions* C, *le second membre* $\int_{x=a}^{x=b} P(f, F)$ *de la formule* (35) *s'annule identiquement.*

Considérons une suite de fonctions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ définies par les formules

$$f_i(x) = (x-a)^n (x-b)^n x^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Ces $n+1$ fonctions, étant des polynomes de diverses puissances, sont certainement linéairement indépendantes. Chacune des fonctions $f_i(x)$ satisfaisant aux équations

$$\begin{array}{lllll} f_i(a) = 0, & f_i'(a) = 0, & f_i''(a), & \ldots, & f_i^{(n-1)}(a) = 0, \\ f_i(b) = 0, & f_i'(b) = 0, & f_i''(b), & \ldots, & f_i^{(n-1)}(b) = 0 \end{array}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

satisfait aussi aux conditions C. On peut donc, d'après le théorème a du n° **16**, présenter chaque fonction $f_i(x)$ sous la forme

$$(42) \qquad f_i(x) = \int_a^b G^C(x, \xi)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

(¹) Nous dirons qu'une expression L(u) est *auto-adjointe* ou *inversement auto-adjointe,* si elle satisfait respectivement à l'identité

$$L(u) = M(u) \qquad \text{ou} \qquad L(u) = -M(u),$$

M(u) étant l'adjointe de L(u).

(²) W. Westfall, *loc. cit.*, § 7.

où l'on a

$$L[f_i(x)] = -\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Si la fonction de Green $G^c(x, \xi)$ est symétrique, on déduit de la formule (42)

$$f_i(x) = \int_a^b G^c(\xi, x)\,\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

d'où suit, en vertu du théorème b du n° **16**,

$$M[f_i(x)] = -\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

On a donc les identités

$$L[f_i(x)] - M[f_i(x)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

d'où résulte que l'équation linéaire

$$L(u) - M(u) = 0,$$

de l'ordre n au plus, a $n+1$ solutions linéairement indépendantes. L'expression $L(u) - M(u)$ s'annule donc identiquement, d'où suit que l'expression $L(u)$ est auto-adjointe. Si la fonction $G^c(x, \xi)$ est symétrique, chaque fonction $F(x)$, satisfaisant aux conditions C, doit satisfaire aussi, d'après le théorème du n° **17**, aux conditions adjointes C′. On voit donc que chaque couple de fonctions $f(x)$ et $F(x)$ qui satisfont aux conditions C satisfont aussi respectivement aux conditions C et aux conditions adjointes C′. Le second membre de la formule (35) $\int_{x=a}^{x=b} P(f, F)$ s'annule donc identiquement pour ces deux fonctions, d'où suit que les conditions C sont *greeniennes*. Réciproquement, si l'expression $L(u)$ est auto-adjointe et si les conditions C sont *greeniennes*, la fonction de Green $G^c(x, \xi)$ est symétrique, comme l'a démontré M. Westfall, en faisant usage de la formule de Green [1].

Au moyen de raisonnements analogues on démontre la proposition suivante :

Pour que la fonction de Green $G^c(x, \xi)$ *soit gauche symétrique,*

---

[1] W. Westfall, *loc. cit.*, § 9.

il faut et il suffit que l'expression $L(u)$ *soit inversement auto-adjointe et que les conditions* C *soient* greeniennes [1].

L'ordre d'une expression $L(u)$ auto-adjointe est toujours pair, d'où suit qu'une fonction $[G^C(x, \xi)]_{2m+1}$ de Green d'une expression différentielle linéaire $L_{2m+1}(u)$ d'un ordre impair $2m+1$ par rapport aux conditions C quelconques (avec une seule restriction de $D_C \neq 0$) n'est pas symétrique. De même, en posant dans les formules du n° **11** $n = 2m+1$, $p = 1$, on trouve une fonction

$$G^1_{2m+1,1}(x, \xi) = [G^C(x, \xi)]_{2m+1}$$

de Green avec deux indices différents qui n'est pas symétrique.

19. On sait que la forme générale d'une expression différentielle linéaire auto-adjointe est

$$L(u) = \frac{d^m}{dx^m}(pu^{(m)}) + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(p_1 u^{(m-1)}) + \ldots + \frac{d}{dx}(p_{m-1}u') + p_m u,$$

l'ordre n de l'expression étant toujours égal à un nombre pair $2m$. On peut démontrer qu'il y a en général

$$\frac{n(n-1)}{2} = m(2m-1)$$

relations nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients α_{ki}, β_{ki} des conditions C pour que ces conditions soient *greeniennes* par rapport à l'expression auto-adjointe $L(u)$ donnée. En effet, le second membre de la formule de Green est formé dans le cas considéré par l'ensemble de termes sous le signe de substitution qu'on trouve en intégrant par parties l'expression

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{k=m} v \frac{d^k(p_{m-k}u^{(k)})}{dx^k} dx \qquad (p_0 = p)$$

jusqu'à obtenir sous le signe d'intégration l'expression

$$\sum_{k=0}^{k=m} u \frac{d^k(p_{m-k}v^{(k)})}{dx^k}.$$

---

[1] W. Westfall, *loc. cit.*, § 8. — Il reste à démontrer que ces conditions sont nécessaires pour que la fonction de Green soit gauche symétrique.

En intégrant par parties le terme général de la somme

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{k=m} v \frac{d^k (p_{m-k} u^{(k)})}{dx^k} dx,$$

on aura, en écrivant, pour abréger, q au lieu de p_{m-k},

$$\begin{aligned} &\int_a^b v \frac{d^k}{dx^k}(qu^{(k)})\,dx \\ &= \Big/_{x=a}^{x=b} \left[\sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i v^{(i)} \frac{d^{k-i-1}}{dx^{k-i-1}}(qu^{(k)}) \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^{k+i} u^{(k-i-1)} \frac{d^i}{dx^i}(qv^{(k)}) \right] + \int_a^b u \frac{d^k}{dx^k}(qu^{(k)})\,dx, \end{aligned}$$

d'où suit, en écrivant la somme

$$\sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^{k+i} u^{(k-i-1)} \frac{d^i}{dx^i}(qv^{(k)})$$

dans l'ordre inverse,

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left[v \frac{d^k}{dx^k}(qu^{(k)}) - u \frac{d^k}{dx^k}(qv^{(k)}) \right] dx \\ &= \Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i \left[v^{(i)} \frac{d^{(k-i-1)}}{dx^{k-i-1}}(qu^{(k)}) - u^{(i)} \frac{d^{(k-i-1)}}{dx^{k-i-1}}(qv^{(k)}) \right] \\ &= \Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha,\beta}(v^{(\alpha)} u^{(\beta)} - u^{(\alpha)} v^{(\beta)}), \end{aligned}$$

où les indices α, β parcourent certaines valeurs entières parfaitement définies, comprises entre 0 et $2k-1$, les coefficients $Q_{\alpha,\beta}$ étant des fonctions parfaitement déterminées, linéaires en $q(x)$ et en ses dérivées jusqu'à l'ordre $2k-1$. On voit donc que le second membre de la formule de Green a dans le cas considéré la forme

$$\Big/_{x=a}^{x=b} \sum_{r,s} Q_{r,s}(v^{(r)} u^{(s)} - v^{(s)} u^{(r)}), \tag{43}$$

où les $Q_{r,s}$ sont des fonctions connues, linéaires en $p, p_1, \ldots, p_{m-1}$ et en ses dérivées (de l'ordre $2m-1$ au plus), et où les indices r, s parcourent certaines combinaisons déterminées de deux à deux, formées des nombres $0, 1, \ldots, 2m-1$. Nous avons vu à la fin du n° 6 que les conditions aux limites C peuvent se mettre toujours sous la forme

$$(44)\quad \begin{cases} u^{(\nu_k-1)}(a)+\displaystyle\sum_{i=\mu+1}^{i=n}\alpha_{\nu_k\nu_i}u^{(\nu_i-1)}(a)+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu}\beta_{\nu_k\nu_\lambda}u^{(\nu_\lambda-1)}(b)=0 \\ \qquad (k=1,2,\ldots,\mu), \\ u^{(\nu_s-1)}(a)+\displaystyle\sum_{i=\mu+1}^{i=n}\alpha_{\nu_s\nu_i}u^{(\nu_i-1)}(a)+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu}\beta_{\nu_s\nu_\lambda}u^{(\nu_\lambda-1)}(b)=0 \\ \qquad (s=\mu+1,\mu+2,\ldots,n), \end{cases}$$

l'ensemble d'indices $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu, \nu_{\mu+1}, \nu_{\mu+2}, \ldots, \nu_n$ formant une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$. Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions quelconques, satisfaisant aux conditions C, que nous écrirons sous la forme (44). En introduisant les désignations

$$\begin{array}{llll}
u^{(\nu_k-1)}(a)=y_k & (k=1,2,\ldots,\mu), & u^{(\nu_s-1)}_{\nu_s}(b)=y_s & (s=\mu+1,\ldots,n),\\
u^{(\nu_\lambda-1)}(b)=y_{n+\lambda} & (\lambda=1,2,\ldots,\mu), & u^{(\nu_i-1)}(a)=y_{n+i} & (i=\mu+1,\ldots,n),\\
v^{(\nu_k-1)}(a)=z_k & (k=1,2,\ldots,\mu), & v^{(\nu_s-1)}(b)=z_s & (s=\mu+1,\ldots,n),\\
v^{(\nu_\lambda-1)}(b)=z_{n+\lambda} & (\lambda=1,2,\ldots,\mu), & v^{(\nu_i-1)}(a)=z_{n+i} & (i=\mu+1,\ldots,n),
\end{array}$$

on aura, d'après les formules (44),

$$(45)\qquad y_k=\sum_{i=1}^{i=n}c_{ki}\,y_{n+i},\qquad z_k=\sum_{i=1}^{i=n}c_{ki}\,z_{n+i}\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

où les c_{ki} sont des coefficients donnés [il est clair que ces coefficients ne sont, au signe près, que les nombres α, β des formules (44) avec les indices ν convenablement choisis]. Conformément aux désignations adoptées, on peut écrire l'expression (43) sous la forme

$$(46)\qquad \sum_{\rho,\sigma}K_{\rho,\sigma}(z_\rho\,y_\sigma-z_\sigma\,y_\rho),$$

où les $K_{\rho,\sigma}$ sont certains coefficients parfaitement déterminés qui sont linéaires par rapport aux valeurs aux limites des fonctions p, p_k et de leurs dérivées, et où les indices ρ, σ prennent des valeurs entières, comprises entre 1 et $2n$, dans des combinaisons parfaitement déterminées. S'il y a dans la somme (46) des termes dont tous les deux indices ρ et σ surpassent n, nous les laissons sans aucune transformation. Si l'un des deux indices ρ, σ, par exemple ρ, surpasse n, on aura, d'après les formules (45),

$$\begin{aligned}K_{\rho,\sigma}(z_\rho y_\sigma - z_\sigma y_\rho) &= K_{\rho,\sigma}\left(z_\rho \sum_{i=1}^{i=n} c_{\sigma i}\, y_{n+i} - y_\rho \sum_{i=1}^{i=n} c_{\sigma i}\, z_{n+i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{i=n} K_{\rho,\sigma}\, c_{\sigma i}(z_\rho y_{n+i} - y_\rho z_{n+i}).\end{aligned}$$

Si l'on a $\rho < n$ et $\sigma < n$, les mêmes formules (45) nous donnent

$$\begin{aligned}K_{\rho,\sigma}(z_\rho y_\sigma - z_\sigma y_\rho) &= K_{\rho,\sigma}\left(\sum_{i=1}^{i=n} c_{\rho i}\, z_{n+i} \sum_{i=1}^{i=n} c_{\sigma i}\, y_{n+i} - \sum_{i=1}^{i=n} c_{\sigma i}\, z_{n+i} \sum_{i=1}^{i=n} c_{\rho i}\, y_{n+i}\right)\\ &= \sum_{\lambda,\mu} K_{\rho,\sigma}(c_{\rho\lambda} c_{\sigma\mu} - c_{\sigma\lambda} c_{\rho\mu})(z_{n+\lambda}\, y_{n+\mu} - z_{n+\mu}\, y_{n+\lambda}),\end{aligned}$$

où les indices λ, μ forment toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons possibles des nombres 1, 2, ..., n deux à deux. En transformant de cette manière l'expression (46), elle prend la forme

$$\sum_{\lambda,\mu} T_{\lambda,\mu}(z_{n+\lambda}\, y_{n+\mu} - z_{n+\mu}\, y_{n+\lambda}), \tag{47}$$

où les indices λ, μ forment aussi toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons possibles des nombres 1, 2, ..., n deux à deux, et où les facteurs $T_{\lambda,\mu}$ sont des fonctions linéaires des expressions $c_{\rho i}$, $c_{\sigma i}$ ou $c_{\rho\lambda} c_{\sigma\mu} - c_{\sigma\mu} c_{\rho\mu}$, les coefficients de ces expressions étant linéaires par rapport aux valeurs aux limites des fonctions p, p_k et de leurs dérivées. Pour que les conditions C soient *greeniennes*, il faut et il suffit dans le cas considéré que l'expression (47) s'annule identiquement, quelles que soient les valeurs des $z_{n+\lambda}$, $y_{n+\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$).

Les relations cherchées sont donc

$$T_{\lambda,\mu} = 0 \qquad (\lambda \neq \mu;\ \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

leur nombre étant égal, en général, à $\frac{n(n-1)}{2} = m(2m-1)$. On peut trouver la forme définitive de ces relations pour chaque type des conditions (44), ces types n'étant d'ailleurs qu'en nombre fini pour une valeur de $n = 2m$ donnée.

Exemple I. — Examinons par rapport à l'expression auto-adjointe

$$\mathrm{L}_4(u) = \frac{d^2(pu'')}{dx^2} + \frac{d(qu')}{dx} + ru$$

du quatrième ordre les conditions aux limites de la forme

$$\mathrm{C}_k(f) = f^{(k-1)}(a) + \beta_{k1} f(b) + \beta_{k2} f'(b) + \beta_{k3} f''(b) + \beta_{k4} f'''(b) = 0$$
$$(k = 1, 2, 3, 4);$$
$$f^{(0)}(a) = f(a).$$

On a dans ce cas

$$\mathrm{P}(u, v) = p(vu''' - uv''' - v'u'' + u'v'') + p'(vu'' - uv'') + q(vu' - uv').$$

En faisant les calculs indiqués plus haut, on trouve les relations

$$\mathrm{T}_{1,2} = q(b) + p(a)\left[\begin{pmatrix} 21 \\ 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 42 \end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix} 11 \\ 32 \end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\mathrm{T}_{1,3} = p'(b) + p(a)\left[\begin{pmatrix} 21 \\ 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 43 \end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix} 11 \\ 33 \end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\mathrm{T}_{1,4} = p(b) + p(a)\left[\begin{pmatrix} 21 \\ 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 44 \end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix} 11 \\ 34 \end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\mathrm{T}_{2,3} = p(b) - p(a)\left[\begin{pmatrix} 22 \\ 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 43 \end{pmatrix}\right] + p'(a)\begin{pmatrix} 12 \\ 33 \end{pmatrix} + q(a)\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\mathrm{T}_{2,4} = \qquad p(a)\left[\begin{pmatrix} 22 \\ 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 44 \end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\mathrm{T}_{3,4} = \qquad p(a)\left[\begin{pmatrix} 23 \\ 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 44 \end{pmatrix}\right] - p'(a)\begin{pmatrix} 13 \\ 34 \end{pmatrix} - q(a)\begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix} = 0,$$

où les symboles $\begin{pmatrix} i & k \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ désignent les déterminants du second ordre, formés par l'intersection des $i^{\text{ième}}$ et $\nu^{\text{ième}}$ ligne avec les $k^{\text{ième}}$ et $\mu^{\text{ième}}$ colonnes du Tableau

$$\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{matrix}$$

Nous avons ainsi trouvé six relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients des conditions C de la forme considérée, pour que ces conditions soient *greeniennes* par rapport à l'expression auto-adjointe donnée $L_4(u)$ du quatrième ordre ou, ce qui est la même chose, pour que la fonction de Green $G^C(x, \xi)$ correspondante (dans l'hypothèse de $D_{4C} \neq 0$) soit symétrique [1].

Exemple II. — Considérons maintenant par rapport à l'expression auto-adjointe

$$L_2(u) = \frac{d}{dx}(pu') + qu$$

du second ordre les conditions C linéaires homogènes d'une forme générale

$$C_1(f) = t_1 f(a) + t_2 f'(a) + t_3 f(b) + t_4 f'(b) = 0,$$
$$C_2(f) = \tau_1 f(a) + \tau_2 f'(a) + \tau_3 f(b) + \tau_4 f'(b) = 0,$$

où t_i, τ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sont des constantes données (nous remplaçons les coefficients α_{ki}, β_{ki}, pour simplifier les notations, par t_i, τ_i; de plus,

---

[1] On peut trouver sans peine des cas où ces relations sont effectivement satisfaites. Par exemple, en posant

$$\beta_{ki} = 0$$

si l'on a

$$K \neq i,$$

ces relations se réduisent aux quatre suivantes :

$$q(b) - q(a)\beta_{11}\beta_{22} = 0, \qquad p'(b) - p'(a)\beta_{11}\beta_{33} = 0,$$
$$p(b) - p(a)\beta_{11}\beta_{44} = 0, \qquad p(b) - p(a)\beta_{22}\beta_{33} = 0.$$

On y satisfera toujours par des valeurs réelles des β_{ii}, si les produits $p(a)\,p'(b)\,q(b)$ et $p(b)\,p'(a)\,q(a)$ sont simultanément positifs ou négatifs. Si l'on a

$$p(a) = p(b), \qquad p'(a) = p'(b), \qquad q(a) = q(b),$$

on satisfait aux quatre relations, indiquées plus haut, en posant

$$\beta_{ii} = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ce cas a été considéré par A. Myller dans son travail (*Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen*, inaugural Dissertation, Göttingen, 1906).

nous supposons, comme toujours, que les conditions C_1 et C_2 sont indépendantes). Dans le cas considéré on a

$$P(u, v) = p(vu' - uv').$$

En posant, pour abréger,

$$t_i \tau_k - t_k \tau_i = \overline{ik} \qquad (i \neq k;\ i = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, 3, 4),$$

considérons deux fonctions u et v qui satisfassent aux conditions C_1, C_2. On aura

$$(48)\quad \begin{cases} t_1 u(a) + t_2 u'(a) = -t_3 u(b) - t_4 u'(b), & t_1 v(a) + t_2 v'(a) = -t_3 v(b) - t_4 v'(b), \\ \tau_1 u(a) + \tau_2 u'(a) = -\tau_3 u(b) - \tau_4 u'(b), & \tau_1 v(a) + \tau_2 v'(a) = -\tau_3 v(b) - \tau_4 v'(b). \end{cases}$$

Si le déterminant $\overline{12} = t_1\tau_2 - t_2\tau_1$ est différent de zéro, on a, en résolvant les équations (48) par rapport à $u(a)$, $u'(a)$, $v(a)$, $v'(a)$ et en substituant les valeurs trouvées dans l'expression $\int_{x=a}^{x=b} p(vu' - uv')$,

$$\int_{x=a}^{x=b} P(u, v) = \int_{x=a}^{x=b} p(vu' - uv') = \frac{\begin{vmatrix} v(b) & u(b) \\ v'(b) & u'(b) \end{vmatrix}}{\overline{12}} \left[\overline{12}\, p(b) - \overline{34}\, p(a)\right].$$

Dans le cas de $\overline{12} \neq 0$, les quantités $u(b)$, $u'(b)$, $v(b)$, $v'(b)$ peuvent prendre dans les formules (48) des valeurs tout à fait arbitraires [par exemple, $v(b) = u'(b) = 1$, $u(b) = v'(b) = 0$], d'où suit que dans ce cas, pour que les conditions C_1, C_2 soient *greeniennes* par rapport à l'expression $L_2(u)$, il faut et il suffit que les coefficients t_i, τ_i de ces conditions satisfassent à la relation

$$(49)\quad \overline{12}\, p(b) - \overline{34}\, p(a) = (t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\, p(b) - (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)\, p(a) = 0.$$

On trouve le même résultat dans le cas de $\overline{34} \neq 0$. Si l'on a $\overline{12} = \overline{34} = 0$, la relation est remplie et les conditions C_1, C_2 sont aussi *greeniennes*. En effet, en tenant compte de l'équation $\overline{12} = 0$, le système (48) nous donne

$$(50)\qquad \begin{cases} \overline{32}\, u(b) + \overline{42}\, u'(b) = 0, & \overline{13}\, u(b) + \overline{14}\, u'(b) = 0, \\ \overline{32}\, v(b) + \overline{42}\, v'(b) = 0, & \overline{13}\, v(b) + \overline{14}\, v'(b) = 0. \end{cases}$$

Le déterminant $v(b)u'(b) - u(b)v'(b)$ des systèmes (50) doit s'annuler. En effet, si l'on a

$$v(b)\,u'(b) - u(b)\,v'(b) \neq 0,$$

les équations (50) nous donnent

$$\overline{32} = \overline{42} = \overline{13} = \overline{14} = 0,$$

et, de plus,

$$\overline{12} = \overline{34} = 0.$$

Donc tous les déterminants de la matrice

$$\begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 \end{matrix}$$

du second ordre s'annulent et les conditions C_1, C_2 ne sont pas indépendantes. On démontre de même, en s'appuyant sur l'équation $\overline{34} = 0$, l'égalité

$$v(a)\,u'(a) - u(a)\,v'(a) = 0,$$

d'où suit

$$\int_{x=a}^{x=b} p(vu' - uv') = 0.$$

Nous avons donc démontré les propositions suivantes :

a. Pour que les conditions aux limites C_1, C_2 *soient* greeniennes *par rapport à l'expression auto-adjointe du second ordre donnée* $L_2(u)$, *il faut et il suffit que les coefficients de ces conditions remplissent la relation* (49).

b. Pour que l'expression $L_2(u)$ *du second ordre ait une fonction* $G^c(x, \xi)$ *de Green par rapport aux conditions* C_1, C_2 *symétriques, il faut et il suffit (dans l'hypothèse de* $D_c \neq 0$) *que l'expression* $L_2(u)$ *soit auto-adjointe et que les coefficients des conditions* C_1, C_2 *satisfassent à la relation* (49).

20. Il n'est pas sans intérêt de voir qu'on peut retrouver la relation (49) immédiatement en partant de l'expression de la fonction de Green, construite pour l'expression auto-adjointe $L_2(u)$ du second ordre par rapport aux conditions C_1, C_2 au moyen de la formule (34) du n° **11**. En écrivant dans ce cas, pour abréger, D au lieu de D_c et en conservant, du reste, les notations des nos **5** et **11**, on aura

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u'_1 \\ u_2 & u'_2 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} C_1(u_1) & C_1(u_2) \\ C_2(u_1) & C_2(u_2) \end{vmatrix},$$

$$w_{12}(x) = -\frac{u_2(x)}{\Delta(x)}, \qquad w_{22}(x) = \frac{u_1(x)}{\Delta(x)},$$

$$v_1(x) = -\frac{u_2(x)}{p(x)\Delta(x)} = -\frac{u_2(x)}{\delta}, \qquad v_2(x) = \frac{u_1(x)}{\delta},$$

où δ, suivant la propriété connue de l'équation auto-adjointe $L_2(u) = 0$, est une constante.

On a donc

$$G^C(x,\xi) = \frac{[D_1(b2)\,u_1(\xi) - D_1(b1)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) + [D_2(b2)\,u_1(\xi) - D_2(b1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x)}{D\delta}$$
$$(x \leqq \xi),$$

$$G^C(x,\xi) = \frac{[-D_1(a2)\,u_1(\xi) + D_1(a1)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) + [-D_2(a2)\,u_1(\xi) + D_2(a1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x)}{D\delta}$$
$$(x \geqq \xi),$$

d'où

$$G^C(\xi,x) = \frac{[-D_1(a2)\,u_1(\xi) - D_2(a2)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) + [D_1(a1)\,u_1(\xi) + D_2(a1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x)}{D\delta}$$
$$(x \leqq \xi),$$

$$G^C(\xi,x) = \frac{[D_1(b2)\,u_1(\xi) + D_2(b2)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) + [-D_1(b1)\,u_1(\xi) - D_2(b1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x)}{D\delta}$$
$$(x \geqq \xi).$$

Pour que la condition de symétrie

$$G^C(x,\xi) = G^C(\xi,x)$$

soit remplie, il faut et il suffit qu'on ait pour des valeurs arbitraires de x et ξ (ces valeurs ne sont restreintes que par les inégalités respectives $x \geqq \xi$, $x \leqq \xi$), prises dans l'intervalle (a, b), les identités

$$\begin{aligned} &[D_1(b2)\,u_1(\xi) - D_1(b1)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) \\ &\quad + [D_2(b2)\,u_1(\xi) - D_2(b1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x) \\ &= [-D_1(a2)\,u_1(\xi) - D_2(a2)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) \\ &\quad + [D_1(a1)\,u_1(\xi) + D_2(a1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[-D_1(a2)\,u_1(\xi) + D_1(a1)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) \\ &\quad + [-D_2(a2)\,u_1(\xi) + D_2(a1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x) \\ &= [D_1(b2)\,u_1(\xi) + D_2(b2)\,u_2(\xi)]\,u_1(x) \\ &\quad + [-D_1(b1)\,u_1(\xi) - D_2(b1)\,u_2(\xi)]\,u_2(x). \end{aligned}$$

En vertu de l'indépendance linéaire des intégrales $u_1(x)$ et $u_2(x)$ de l'équation $L_2(u) = 0$, ces identités ne sont possibles que si l'on a

$$\begin{aligned} D_1(b2) &= -D_1(a2), & -D_2(b1) &= D_2(a1), \\ D_1(b1) &= D_2(a2), & D_2(b2) &= D_1(a1). \end{aligned}$$

De ces quatre relations les deux premières sont satisfaites identiquement, et les deux dernières sont équivalentes; en effet, on obtient l'une d'elles en retranchant l'autre de l'identité $D = D$. Il ne reste donc qu'une relation nécessaire et suffisante

$$D_2(a2) = D_1(b1).$$

En faisant les calculs dans les deux membres, on trouve successivement

$$\begin{vmatrix} C_{a1}(u_1) + C_{b1}(u_1) & C_{a1}(u_2) \\ C_{a2}(u_1) + C_{b2}(u_1) & C_{a2}(u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{b1}(u_1) & C_{a1}(u_2) + C_{b1}(u_2) \\ C_{b2}(u_1) & C_{a2}(u_2) + C_{b2}(u_2) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} C_{b1}(u_1) & C_{b1}(u_2) \\ C_{b2}(u_1) & C_{b2}(u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{a1}(u_1) & C_{a1}(u_2) \\ C_{a2}(u_1) & C_{a2}(u_2) \end{vmatrix},$$

$$(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\,\Delta(a) = (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)\,\Delta(b)$$

ou, en vertu de l'identité $p(a)\Delta(a) = p(b)\Delta(b) = \delta$,

$$(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\,p(b) - (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)\,p(a) = 0,$$

ce qui coïncide avec la relation (49).

21. Jusqu'ici nous avons étudié les propriétés de la fonction de Green $G^c(x, \xi)$, en supposant que le déterminant D_c (resp. D) est différent de zéro. Nous nous proposons de démontrer qu'on peut toujours construire, dans le cas où le déterminant D de l'expression auto-adjointe $L_2(u)$ du second ordre par rapport aux conditions C_1, C_2 s'annule, une fonction de Green correspondante *généralisée* [1], si ces conditions sont *greeniennes* ou, ce qui est la même chose, si l'équation (49) est remplie.

---

[1] D. HILBERT, *loc. cit.*, *Greensche Function in erweitertem sinne*, p. 219-238.

En effet, si le déterminant D s'annule, l'équation

$$L_2(u) = 0$$

a, par rapport aux conditions C_1, C_2, une solution distinguée $\psi_0(x)$. Supposons d'abord que les intégrales de l'équation

$$L_2(u) = 0$$

ne satisfassent pas toutes aux conditions C_1, C_2. Prenons dans ce cas pour le système fondamental l'intégrale $\psi_0(x)$ et une autre intégrale quelconque linéairement indépendante $u_0(x)$ de l'équation

$$L_2(u) = 0,$$

et construisons une solution particulière $w(x)$ de l'équation

(51) $$L_2(u) = p(\xi)\psi_0(\xi)\psi_0(x).$$

En posant

$$w(x) = \mu(x)\psi(x) + \nu(x)u_0(x),$$

en appliquant la méthode de variation des constantes et en tenant compte des relations

$$p(x)\Delta(x) = p(\xi)\Delta(\xi) = \delta,$$

on aura

$$\begin{aligned}\frac{d\mu(x)}{dx} &= -\frac{p(\xi)\psi_0(\xi)\psi_0(x)u_0(x)}{p(x)\Delta(x)}\\ &= -\frac{p(\xi)\psi_0(\xi)\psi_0(x)u_0(x)}{p(\xi)\Delta(\xi)} = -\frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_0(x)u_0(x),\\ \frac{d\nu}{dx} &= \frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}[\psi_0(x)]^2,\end{aligned}$$

d'où vient, en prenant $x = a$ pour la limite inférieure d'intégration,

$$w(x) = -\frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}\left\{\psi_0(x)\int_a^x \psi_0(x)u_0(x)\,dx - u_0(x)\int_a^x [\psi_0(x)]^2\,dx\right\}.$$

En introduisant la désignation

$$\int_a^b \psi_0(x)u_0(x)\,dx = I,$$

et en supposant, pour simplifier les calculs, que la fonction $\psi_0(x)$ satisfasse à la relation

$$\int_a^b [\psi_0(x)]^2\, dx = 1,$$

ce qu'on peut toujours atteindre, en multipliant $\psi_0(x)$ par un facteur convenable, on aura

$$w(a) = 0, \qquad w(b) = -\frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}[\psi_0(b)\mathrm{I} - u_0(b)],$$

$$w'(a) = 0, \qquad w'(b) = -\frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}[\psi_0'(b)\mathrm{I} - u_0'(b)].$$

Construisons maintenant pour l'équation (51) une solution *principale* $\gamma(x, \xi)$, c'est-à-dire une solution qui admette dans les intervalles (a, ξ) et (ξ, b) deux dérivées successives continues et qui satisfasse de plus à la condition

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\Big/^{x=\xi+\varepsilon}\frac{d\gamma(x, \xi)}{dx} - \Big/^{x=\xi-\varepsilon}\frac{d\gamma(x, \xi)}{dx}\right] = -1.$$

L'intégrale générale de l'équation (51) est

$$w(x) + u(x),$$

où $u(x)$ est l'intégrale générale de l'équation homogène

$$\mathrm{L}_2(u) = 0.$$

On trouve donc, en construisant d'abord une solution principale de l'équation

$$\mathrm{L}_2(u) = 0$$

au moyen de formules analogues à celles du n° **2**, que la solution principale $\gamma(x, \xi)$ s'exprime par les formules

$$\gamma(x, \xi) = (m_1 + l_1)\,\psi_0(x) + (m_2 + l_2)\,u_0(x) + w(x) \qquad (x \leqq \xi),$$
$$\gamma(x, \xi) = \qquad m_1\,\psi_0(x) + \qquad m_2\,u_0(x) + w(x) \qquad (x \geqq \xi),$$

où

$$l_1 = -\frac{u_0(\xi)}{\Delta(\xi)}, \qquad l_2 = \frac{\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)},$$

et où m_1 et m_2 sont des quantités arbitraires, indépendantes de x. Cherchons maintenant à déterminer les coefficients m_1, m_2 de manière que la solution principale $\gamma(x, \xi)$ satisfasse aux conditions C_1, C_2. En remarquant que la fonction $\psi_0(x)$ satisfait, par hypothèse, aux relations

$$C_1(\psi_0) = 0, \qquad C_2(\psi_0) = 0,$$

on aura

$$\begin{aligned} C_1[\gamma(x)] &= m_1 C_1(\psi_0) + m_2 C_1(u_0) + l_1 C_{a1}(\psi_0) + C_1(w) \\ &= m_2 C_1(u_0) + l_1 C_{a1}(\psi_0) + l_2 C_{a1}(u_0) - l_2 C_{b1}(\psi_0) + l_2 C_{b1}(u_0) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(m_2 + l_2) C_1(u_0) + (l_1 + l_2 I) C_{a1}(\psi_0) = 0 \tag{52}$$

et, d'une manière analogue,

$$(m_2 + l_2) C_2(u_0) + (l_1 + l_2 I) C_{a2}(\psi_0) = 0. \tag{53}$$

Les équations (52) et (53) ne peuvent être compatibles que si la condition

$$(l_1 + l_2 I) \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_1(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_2(u_0) \end{vmatrix} = 0$$

est remplie. En remarquant que, les conditions C_1, C_2 étant *greeniennes,* la formule (49) a lieu, on aura, en tenant compte des relations

$$C_1(\psi_0) = C_{a1}(\psi_0) + C_{b1}(\psi_0) = 0,$$

$$C_2(\psi_0) = C_{a2}(\psi_0) + C_{b2}(\psi_0) = 0, \qquad p(a)\,\Delta(a) = p(b)\,\Delta(b) = \delta,$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_1(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_2(u_0) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_{a1}(u_0) + C_{b1}(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_{a2}(u_0) + C_{b2}(u_0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_{a1}(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_{a2}(u_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_{b1}(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_{b2}(u_0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_{a1}(\psi_0) & C_{a1}(u_0) \\ C_{a2}(\psi_0) & C_{a2}(u_0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} C_{b1}(\psi_0) & C_{b1}(u_0) \\ C_{b2}(\psi_0) & C_{b2}(u_0) \end{vmatrix} \\ &= (t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\,\Delta(a) - (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)\,\Delta(b) \\ &= \frac{\delta}{p(a)\,p(b)}[(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\,p(b) - (t_3\tau_4 - t_4\tau_3)\,p(a)] = 0. \end{aligned}$$

On voit donc que dans le cas de conditions C_1, C_2 *greeniennes* la condition de compatibilité des équations (52) et (53) est toujours satisfaite. D'autre part, suivant notre hypothèse que les intégrales de l'équation $L_2(u) = 0$ ne satisfont pas toutes aux conditions C_1, C_2, l'une des quantités $C_1(u_0)$, $C_2(u_0)$ doit être différente de zéro. En effet, dans le cas contraire, l'intégrale générale $k_1\psi_0 + k_2 u_0$ de l'équation $L_2(u) = 0$ (k_1 et k_2 étant des constantes arbitraires) satisferait aux mêmes conditions C_1, C_2. On voit donc que les équations (52) et (53) ont dans le cas considéré une solution parfaitement déterminée par rapport à m_2 [1]. On peut donc construire une solution principale de l'équation (51) qui satisfasse aux conditions C_1, C_2 et qui renferme de plus un paramètre arbitraire m_1 que nous déterminerons de manière à satisfaire à l'équation

$$\int_a^b \gamma(x, \xi)\psi_0(x)\,dx = 0,$$

ce qui est toujours possible. Désignant une telle solution principale de l'équation (51) qui satisfasse à l'ensemble de toutes les conditions indiquées plus haut par $\gamma_1(x, \xi)$ et en la divisant par $p(\xi)$, on obtient une fonction

$$G_1^C(x, \xi) = \frac{\gamma_1(x, \xi)}{p(\xi)}$$

qui est dite *fonction généralisée* de Green de l'expression $L_2(u)$ par rapport aux conditions C_1, C_2.

Supposons maintenant que toutes les intégrales de l'équation $L_2(u) = 0$ satisfassent aux conditions C_1, C_2. Dans ce cas la relation (49) est toujours remplie et les conditions C_1, C_2 sont, par suite, *greeniennes* par rapport à l'expression $L_2(u)$. En effet, en désignant par u_1, u_2 deux intégrales indépendantes de l'équation $L_2(u) = 0$, on a, en vertu des formules $C_1(u_2) = 0$, $C_2(u_2) = 0$,

$$\begin{vmatrix} C_{a1}(u_1) & C_1(u_2) \\ C_{a2}(u_1) & C_2(u_2) \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit, comme nous l'avons vu plus haut, au moyen des

---

(1) L'expression

$$l_1 + l_2 I = \frac{-u_0(\xi) + I\psi_0(\xi)}{\Delta(\xi)}$$

ne pouvant s'annuler identiquement, car les fonctions $u_0(\xi)$ et $\psi_0(\xi)$ sont linéairement indépendantes, on voit que la relation (49) est même nécessaire pour l'existence de la fonction de Green généralisée dans le cas considéré.

relations

$$C_1(u_1) = 0, \qquad C_2(u_1) = 0,$$

l'équation (49). Prenons pour le système fondamental deux solutions $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ de l'équation $L_2(u) = 0$ qui satisfassent aux conditions d'orthogonalité, c'est-à-dire aux relations

$$\int_a^b [\psi_1(x)]^2\,dx = 1, \qquad \int_a^b [\psi_2(x)]^2\,dx = 1, \qquad \int_a^b \psi_1(x)\,\psi_2(x)\,dx = 0.$$

On construit aisément ces solutions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, en partant d'un système fondamental quelconque [1]. Nous nous proposons maintenant de trouver une solution particulière $\varpi(x)$ de l'équation

$$(54) \qquad L(u) = p(\xi)[\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)].$$

En posant

$$\varpi(x) = \mu(x)\,\psi_1(x) + \nu(x)\,\psi_2(x),$$

en appliquant la méthode de variation des constantes et en tenant compte de la relation

$$p(x)\,\Delta(x) = p(\xi)\,\Delta(\xi),$$

on aura

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu(x)}{dx} &= -\frac{p(\xi)\,[\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_2(x)}{p(x)\,\Delta(x)} \\
&= -\frac{[\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_2(x)}{\Delta(\xi)}, \\
\frac{d\nu(x)}{dx} &= \frac{[\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_1(x)}{\Delta(\xi)},
\end{aligned}$$

d'où vient, en prenant $x = a$ pour la limite inférieure d'intégration,

$$\begin{aligned}
\varpi(x) = \frac{1}{\Delta(\xi)}\Big\{ &\psi_2(x)\int_a^x [\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_1(x)\,dx \\
&- \psi_1(x)\int_a^x [\psi_1(\xi)\,\psi_1(x) + \psi_2(\xi)\,\psi_2(x)]\,\psi_2(x)\,dx \Big\}.
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations d'orthogonalité auxquelles satisfont

---

(1) E. SCHMIDT, *loc. cit.*, § 3.

les fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, on trouve

$$\begin{aligned}
w(a) &= 0,\\
w'(a) &= 0,\\
w(b) &= -\frac{\psi_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_1(b) + \frac{\psi_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_2(b),\\
w'(b) &= -\frac{\psi_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_1'(b) + \frac{\psi_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\psi_2'(b).
\end{aligned}$$

En désignant par $\gamma(x, \xi)$ une solution principale de l'équation (54), on aura

$$\begin{aligned}
\gamma(x, \xi) &= (m_1 + l_1)\,\psi_1(x) + (m_2 + l_2)\,\psi_2(x) + w(x) \qquad (x \leqq \xi),\\
\gamma(x, \xi) &= \quad m_1\,\psi_1(x) + \quad m_2\,\psi_2(x) + w(x) \qquad (x \geqq \xi),
\end{aligned}$$

où

$$l_1 = -\frac{\psi_2(\xi)}{\Delta(\xi)}, \qquad l_2 = \frac{\psi_1(\xi)}{\Delta(\xi)}$$

et où m_1, m_2 sont des quantités arbitraires. On démontre aisément que la solution principale $\gamma(x, \xi)$ satisfait aux conditions C_1, C_2, quelles que soient les valeurs des constantes m_1, m_2. En effet, en ayant en vue les relations

$$C_1(\psi_1) = C_2(\psi_1) = C_1(\psi_2) = C_2(\psi_2) = 0,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
C_1[\gamma(x, \xi)] &= m_1\,C_1(\psi_1) + m_2\,C_1(\psi_2) + l_1\,C_{a1}(\psi_1)\\
&\qquad + l_2\,C_{a1}(\psi_2) + \quad C_1(w)\\
&= l_1\,C_{a1}(\psi_1) + l_2\,C_{a1}(\psi_2) + l_1\,C_{b1}(\psi_1)\\
&\qquad + l_2\,C_{b1}(\psi_2) = l_1\,C_1(\psi_1) + l_2\,C_1(\psi_2) = 0
\end{aligned}$$

et, d'une manière analogue,

$$C_2[\gamma(x, \xi)] = 0.$$

Déterminant les quantités m_1, m_2 de manière à satisfaire aux équations

$$\int_a^b \gamma(x, \xi)\,\psi_1(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b \gamma(x, \xi)\,\psi_2(x)\,dx = 0,$$

ce qui est toujours possible, désignons maintenant la solution principale qui correspond à ces valeurs de m_1 et m_2 par $\gamma_2(x, \xi)$ et divisons-la par $p(\xi)$. On obtient ainsi une fonction

$$G_2^{\mathfrak{C}}(x, \xi) = \frac{\gamma_2(x, \xi)}{p(\xi)},$$

qu'on désigne de même comme *fonction de Green généralisée* de l'expression $L_2(u)$ auto-adjointe par rapport aux conditions C_1, C_2.

Exemple. — L'expression différentielle auto-adjointe

$$L_2(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \pi^2 u$$

n'a pas de fonction de Green dans le sens ordinaire du mot par rapport aux conditions

$$C_1(f) = f(1) - f(-1) = 0, \qquad C_2(f) = f'(1) - f'(-1) = 0,$$

parce que les deux solutions indépendantes $\sin \pi x$ et $\cos \pi x$ de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \pi^2 u = 0$$

satisfont à ces conditions. En faisant les calculs indiqués plus haut, on aura

$$G_2^{\mathfrak{C}}(x, \xi) = \frac{\sin \pi(x - \xi)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(x - \xi) \sin \pi(x - \xi) + \frac{1}{4\pi^2} \cos \pi(x - \xi)$$
$$(x \quad \xi),$$

$$G_2^{\mathfrak{C}}(x, \xi) = \frac{\sin \pi(\xi - x)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(x - \xi) \sin \pi(x - \xi) + \frac{1}{4\pi^2} \cos \pi(x - \xi)$$
$$(x \quad \xi).$$

Les fonctions de Green $G_1^{\mathfrak{C}}(x, \xi)$ et $G_2^{\mathfrak{C}}(x, \xi)$ généralisées que nous venons de construire sont symétriques, comme on le démontre aisément au moyen de la formule de Green ([1]). Ces fonctions généralisées de Green jouent un rôle analogue à celui de la fonction de Green $G^{\mathfrak{C}}(x, \xi)$ dans le cas de D différent de zéro. En faisant usage des théo-

---

([1]) D. Hilbert, *loc. cit.*, p. 220. — W. Westfall, *loc. cit.*, § 9.

rèmes correspondants de MM. Hilbert et Westfall [1], on peut résumer cette analogie dans les propositions suivantes :

a. Soit $L_2(u)$ *une expression auto-adjointe du second ordre. L'ensemble des valeurs du paramètre* λ_m, *pour lesquelles l'équation*

$$L_2(\varphi_m) + \lambda_m \varphi_m = 0$$

admet par rapport à φ_m *une solution distinguée, satisfaisant aux conditions* greeniennes C_1, C_2 *données, coïncide, dans le cas où le déterminant* D *de l'expression* $L_2(u)$ *par rapport à ces conditions s'annule, avec l'ensemble des autovaleurs du noyau* $G_1^c(x, \xi)$ [*ou éventuellement* $G_2^c(x, \xi)$], *abstraction faite de la valeur* $\lambda_m = 0$. *L'ensemble des solutions distinguées correspondantes* φ_m (*en excluant de nouveau le cas de* $\lambda_m = 0$) *coïncide avec l'ensemble des autofonctions du noyau* $G_1^c(x, \xi)$ [*ou* $G_2^c(x, \xi)$].

b. Si l'équation $L_2(u) = 0$ *n'a qu'une seule intégrale (définie jusqu'à un facteur constant près) satisfaisant aux conditions* greeniennes C_1, C_2 *données, chaque fonction* $f(x)$ *qui, en satisfaisant aux mêmes conditions, a dans l'intervalle* (a, b) *deux dérivées successives continues est développable en une série absolument et uniformément convergente de la forme*

$$f(x) = \sum_\nu \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi,$$

où $\varphi_1(x)$ *est une solution distinguée (orthogonalement réglée) de l'équation* $L_2(u) = 0$ *par rapport aux conditions* C_1, C_2, *et où* $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... *forment l'ensemble des autofonctions de la fonction généralisée* $G_1^c(x, \xi)$ *de Green, prise comme le noyau d'une équation intégrale de la deuxième espèce.*

c. Si toutes les solutions de l'équation $L_2(u) = 0$ *satisfont aux conditions* C_1, C_2 greeniennes *données, chaque fonction* $f(x)$ *qui, en satisfaisant aux mêmes conditions, a dans l'intervalle* (a, b) *deux dérivées successives continues est développable en une série*

---

[1] D. HILBERT, *loc. cit.*, p. 230. — W. WESTFALL, *loc. cit.*, § 9.

absolument et uniformément convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu} \varphi_\nu(x) \int_a^b f(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi,$$

où $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *forment un système orthogonal de solutions distinguées de l'équation* $L_2(u) = 0$ *par rapport aux conditions* C_1, C_2, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, ... *étant l'ensemble des autofonctions du noyau* $G_2^C(x, \xi)$.

Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique;

PAR M. HENRIK PETRINI.

CHAPITRE I.

LA DÉRIVÉE SECONDE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE D'UNE SURFACE PLANE.

1. *Le potentiel logarithmique et sa dérivée première.* — Soit ρ une fonction finie et intégrable des coordonnées d'un point Q situé dans le plan considéré. Nous définirons le potentiel logarithmique V d'une portion finie du plan pour un point $P_0(x, y)$ du plan par la formule

$$V(x, y) = \int \rho \log \frac{1}{r} d\omega, \tag{1}$$

où x et y sont les coordonnées rectangulaires du point P_0 et où $d\omega$ est l'élément de surface au point Q; r est la distance P_0Q et l'intégration s'étend sur tous les éléments de l'aire considérée qui est supposée finie. Si le point P_0 est situé à l'extérieur de cette aire, la fonction V, ainsi que toutes ses dérivées, est finie. Pour un point intérieur il suffit d'étudier la partie du potentiel qui se rapporte à un petit cercle dont le centre est en ce point P_0. Soit a le rayon de ce cercle, et prenons le point P_0 peur origine d'un système de coordonnées polaires (r, v); donc nous aurons

$$V = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \rho(r, v) \frac{1}{r} r\,dr; \tag{2}$$

d'où il suit que la fonction V *est toujours finie et continue.*

Soit maintenant V_h la valeur du potentiel logarithmique en un point P voisin de P_0; nous aurons

$$(3)\quad \begin{cases} V_h = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \rho \log \frac{1}{R} r\,dr, \\ R \equiv PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu_1 + h^2}, \\ h \equiv P_0P, \\ u_1 \equiv \cos(P_0P, P_0Q), \end{cases}$$

$$(4)\quad \therefore V_h - V = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \rho \log \frac{r}{R} r\,dr.$$

Posons

$$(5)\quad \begin{cases} r = ht, \\ \therefore \frac{1}{h}(V_h - V) = h \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{a}{h}} \rho(ht, v) \log \frac{t}{q} t\,dt, \\ q \equiv \sqrt{t^2 - 2tu_1 + 1}. \end{cases}$$

Soit w une constante > 1. Pour $t > w$ nous trouverons, en développant,

$$(6)\quad \log \frac{t}{q} = \frac{u_1}{t} + \frac{1}{t_2} P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie},$$

$$(7)\quad \therefore \frac{1}{h}(V_h - V) = h \int_0^{2\pi} dv \int_0^w \rho(ht, v) \log \frac{t}{q} t\,dt$$
$$+ \int_0^{2\pi} u_1\,dv \int_{wh}^a \rho\,dr + h \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{a}{h}} \rho P \frac{dt}{t}.$$

La quantité $V_h - V$ étant toujours finie pour toutes les valeurs de h, quelle que soit la fonction ρ, le premier terme du second membre de l'égalité (7) est fini quelle que soit ρ,

$$\therefore \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} dv \int_0^w \rho(ht, v) \log \frac{t}{q} t\,dt$$

est finie, parce que h n'entre dans cette quantité que dans la fonction ρ. Le second terme est toujours fini. Enfin le troisième terme peut s'écrire

$$2\pi h(\rho P)_m \log \frac{a}{wh},$$

$(\rho P)_m$ étant une valeur moyenne de ρP. Par suite, la limite pour $h = 0$ de ce terme est zéro. En passant à la limite pour $\lim h = 0$ l'équation (7) se réduit à

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} = \lim_{h=0} \frac{1}{h}(V_h - V) = \int_0^{2\pi} u_1\, dv \int_0^a \rho\, dr = \int \rho \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s_1}\, dw, \tag{8}$$

ds_1 étant un élément pris dans la direction de P_0P. L'équation (8) montre que *la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s_1}$ *est toujours finie*. Nous disons aussi que *la dérivée première est toujours continue*. En effet, soient V_h le potentiel logarithmique au point P, $P_0P = h$, et ds_2 un élément quelconque. De l'équation (8) nous tirons [*cf.* équation (3)]

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial V_h}{\partial s_2} = \int \rho \frac{\partial \log \frac{1}{R}}{\partial s_2}\, dw = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \rho \frac{ru_2 - hc}{R^2}\, r\, dr,\\
&R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu_1 + h^2},\\
&u_1 = \cos(r, ds_1),\\
&u_2 = \cos(r, ds_2),\\
&C = \cos(ds_1, ds_2),
\end{aligned}\right.$$

ds_1 étant un élément pris dans la direction de P_0P. Posons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&r = ht.\\
&\therefore \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s_2} - \frac{\partial V}{\partial s_2}\right) = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{a}{h}} \rho(ht, v)\left(\frac{t^2 u_2 - tc}{q^2} - u_2\right) dt,\\
&q = \sqrt{t^2 - 2tu_1 + 1}.
\end{aligned}\right.$$

En développant, nous trouverons pour $t > 1$

$$\frac{t^2 u_2 - tc}{q^2} - u_2 = \frac{2u_1 u_2 - c}{t} + \frac{1}{t^2} P', \qquad \lim_{t=\infty} P' \text{ finie}; \tag{11}$$

par suite, nous pourrons écrire

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s_2}-\frac{\partial V}{\partial s_2}\right)=K_h+L_h,\\
&K_h=\int_0^{2\pi}(2u_1u_2-c)\,dv\int_h^a \rho(r,v)\frac{dr}{r}=\int_{(h)}\rho\frac{\partial^2\log\frac{1}{r}}{\partial s_1\,\partial s_2}\,dw,\\
&L_h=\int_0^{2\pi}dv\int_0^w \rho(ht,v)\left(\frac{t^2u_2-tc}{q^2}-u_2\right)dt\\
&\qquad+\int_0^{2\pi}dv\int_w^{\frac{a}{h}}\rho P'\frac{dt}{t^2}-\int_0^{2\pi}(2u_1u_2-c)\,dv\int_1^w\rho\frac{dr}{r},
\end{aligned}\right.$$

où w est une constante >1 mais $<\frac{a}{h}$, et où l'intégration par rapport à dw s'étend sur toute l'aire considérée, excepté un cercle de rayon h dont le centre se trouve au point P_0. On peut écrire

$$K_h=2\pi[(2u_1u_2-c)\rho]_m\log\frac{a}{h},$$

où l'indice m indique une valeur moyenne

$$\therefore \lim_{h=0}(h K_h)=0.$$

Quant à L_h le premier terme du second membre est fini pour $\lim h=0$, parce que $\frac{\partial V_h}{\partial s_2}$ est finie quelle que soit ρ, et que h n'entre dans ce terme que dans la fonction $\rho(ht, v)$. Le second terme du même membre est aussi fini même pour $\lim h=0$ d'après (11). Enfin, le troisième terme est toujours fini,

$$\therefore \lim_{h=0} L_h \text{ finie},$$

$$\therefore \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s_2}-\frac{\partial V}{\partial s_2}\right)=0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'où le résultat suivant :

Si la fonction ρ [équation (1)] *est intégrable et reste toujours numériquement plus petite qu'une quantité fixe finie, le potentiel logarithmique d'une aire finie reste toujours fini et continu ainsi que sa dérivée première.*

2. *Existence de la dérivée seconde.* — La quantité L_h (12) peut s'écrire (11)

$$(13)\qquad L_h = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \rho\left(\frac{t^2 u_2 - tc}{q^2} - u_2\right) dt + \int_0^{2\pi} dv \int_1^{\frac{a}{h}} \rho P' \frac{dt}{t^2}.$$

Or on a identiquement, si ρ_0 est une quantité qui est indépendante de t,

$$(14)\qquad \int_1^{\frac{a}{h}} \rho P' \frac{dt}{t^2} = \rho_0 \int_1^{\infty} P' \frac{dt}{t^2} - \rho_0 \int_{\frac{a}{h}}^{\infty} P' \frac{dt}{t^2} + \int_{w}^{\frac{a}{h}} (\rho - \rho_0) P' \frac{dt}{t^2} + \int_1^{w} (\rho - \rho_0) P' \frac{dt}{t^2},$$

w étant une constante arbitraire telle que $1 < w < \frac{a}{h}$.

Le premier terme du second membre de l'égalité (14) est toujours fini (11). De plus, on peut choisir la quantité w si grande que pour toutes les valeurs de h, telles que $\frac{a}{h} > w$, le deuxième et le troisième terme du même membre restent numériquement plus petits qu'une constante arbitraire σ choisie d'avance, quelque petite qu'elle soit. Nous supposerons maintenant que *la fonction ρ est continue par rapport à r pour chaque valeur de v*, et nous posons

$$(15)\qquad \rho_0(v) = \lim_{r=0} \rho(r, v).$$

Donc nous pourrons choisir h assez petite pour que le dernier terme du second membre de l'égalité (14) soit numériquement $< \sigma$. D'où nous tirons

$$\lim_{h=0} \int_1^{\frac{a}{h}} \rho P' \frac{dt}{t^2} = \rho_0 \int_1^{\infty} P' \frac{dt}{t^2}.$$

Si nous posons

$$L = \lim_{h=0} L_h,$$

nous trouverons

$$(16)\qquad L = \int_0^{2\pi} \rho_0(v) u_2 \, dv \int_0^1 \left(\frac{t^2}{q^2} - 1\right) dt + \int_0^{2\pi} \rho_0(v) u_2 \, dv \int_1^{\infty} \left(\frac{t^2}{q^2} - 1 - \frac{2u_1}{t}\right) dt - c \int_0^{2\pi} \rho_0(v)\, dv \int_0^1 \frac{t\, dt}{q^2} - c \int_0^{2\pi} \rho_0(v)\, dv \int_1^{\infty} \left(\frac{t}{q^2} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

Posons

$$(\chi, ds_1) \equiv \psi_1, \qquad (\chi, ds_2) \equiv \psi_2, \qquad \therefore (ds_1, ds_2) = (\psi_2 - \psi_1),$$

$$(17) \qquad \therefore u_1 = \cos(v - \psi_1), \qquad u_2 = \cos(v - \psi_2), \qquad c = \cos(\psi_2 - \psi_1).$$

En effectuant l'intégration par rapport à t de chaque terme du second membre de l'égalité (16) au moyen de la Table des intégrales à la fin du Volume, nous trouverons

$$\mathrm{L} = \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(2u_1^2 - 1)u_2 \bar{\mathrm{I}}\, dv - c\int_0^{2\pi} \rho_0(v) u_1 \bar{\mathrm{I}}\, dv,$$

$$\bar{\mathrm{I}} \equiv \int_0^{\infty} \frac{dt}{q^2} = \frac{\pi - |v - \psi_1|}{\sin|v - \psi_1|}.$$

Au moyen de l'identité

$$2u_1^2 u_2 - u_2 - cu_1 = -\sin(v - \psi_1)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)$$

nous trouverons enfin

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{L} &= -\int_0^{2\pi} \rho_0(v)(\pi - v + \psi_1)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ &\quad + 2\pi \int_0^{\psi_1} \rho_0(v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ &= -\int_0^{2\pi} \rho_0(v + \psi_1)(\pi - v)\sin(2v + \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ &\qquad (0 \leqq \psi_1 < 2\pi). \end{aligned} \right.$$

En passant à la limite nous tirons du système (12)

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial s_1 \partial s_2} = \mathrm{K}_{s_1 s_2} + \mathrm{L}, \\ &\mathrm{K}_{s_1 s_2} \equiv \lim_{h=0} \mathrm{K}_h, \\ &\mathrm{K}_h = \int_0^{2\pi} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \int_{h_1}^{a} \rho \frac{dr}{r} = \int_{(h)} \rho \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\omega. \end{aligned} \right.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si donc la fonction ρ est intégrable et reste toujours numériquement plus petite qu'une constante finie, si de plus pour* *chaque direction v la fonction ρ est continue par rapport au rayon vecteur r, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ du potentiel logarithmique est que la quantité* K_{s_1, s_2} (19) *existe, et la valeur de la dérivée est donnée par les égalités* (19) *et* (18).

Corollaires. — 1° Si $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ existe, on trouvera

$$\int_0^{2\pi} \rho_0(v) \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv = 0. \tag{20}$$

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} K_h - K_{h'} &= \int_0^{2\pi} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \int_h^{h'} \rho(r, v) \frac{dr}{r} \\ &= \log \frac{h'}{h} \int_0^{2\pi} \rho(r_m, v) \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv, \end{aligned}$$

où r_m est une valeur moyenne de r. Par hypothèse, la limite pour $h = 0$ et $h' = 0$ du premier membre est zéro quel que soit le rapport $\frac{h'}{h}$; donc, etc.

2° On trouvera (19) et (18)

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s_2\, \partial s_1} \\ & \quad = (\psi_2 - \psi_1) \int_0^{2\pi} \rho_0(v) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv - 2\pi \int_{\psi_1}^{\psi_2} \rho_0(v) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ & \quad = - \int_0^{2\pi} [\rho_0(v + \psi_1) \sin(2v + \psi_1 - \psi_2) - \rho_0(v + \psi_2) \sin(2v + \psi_2 - \psi_1)] (\pi - v)\, dv \\ & \qquad\qquad (0 \leqq \psi_1 < 2\pi, \qquad 0 \leqq \psi_2 < 2\pi), \end{aligned} \right. \tag{21}$$

où le second membre est toujours fini. Par suite, si l'une des deux dérivées du premier membre de l'égalité (21) existe, l'autre existe aussi.

3° Si la fonction $\rho(r, v)$ est continue, $\rho_0(v)$ est une constante, et l'on trouvera

$$L = -\pi \rho_0 c. \tag{22}$$

Remarque I. — Dans ce cas les deux dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2\, \partial s_1}$ sont égales, si elles existent.

4° Pour les directions suivant les axes on trouvera

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \cos 2v\, dv \int_h^a \rho(r, v)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(\pi - v)\sin 2v\, dv,\\
\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} &= \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \sin 2v\, dv \int_h^a \rho(r, v)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(\pi - v)\cos 2v\, dv,\\
\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x} &= \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \sin 2v\, dv \int_h^a \rho(r, v)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi} \rho_0(v)\left(\frac{3\pi}{2} - v\right)\cos 2v\, dv - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_0(v)\cos 2v\, dv\\
&= \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \sin 2v \quad \int_h^a \rho(r, v)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi} \rho_0\left(v + \frac{\pi}{2}\right)(\pi - v)\cos 2v\, dv,\\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \cos 2v\, dv \int_h^a \rho(r, v)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi} \rho_0(v)\left(\frac{3\pi}{2} - v\right)\sin 2v\, dv - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_0(v)\sin 2v\, dv\\
&= -\lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \cos 2v\, dv \int_h^a \rho(r, v)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi} \rho_0\left(v + \frac{\pi}{2}\right)(\pi - v)\sin 2v\, dv.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarque II. — Si $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe, donc $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ existe et inversement.

5° On trouvera les relations suivantes :

$$
(24)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2} = \cos\psi_2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial x} + \sin\psi_2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial y},
$$

$$
(25)\qquad K_{yy} = -K_{xx},
$$

$$
(26)\qquad K_{s_1 s_2} = K_{xx}\cos(\psi_1 + \psi_2) + K_{xy}\sin(\psi_1 + \psi_2).
$$

Remarque III. — De l'égalité (26) on conclut que, si $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}$ existent, donc $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ existe pour toutes les directions de ds_1 et ds_2.

6° *Cas particuliers.* — La dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ existe :

α. Si ρ est indépendante de v;

β. Si ρ est indépendante de r, pourvu que

$$
(20^*)\qquad \int^{2\pi} \rho\cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv = 0;
$$

par conséquent, pourvu que

$$(27)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \rho \cos 2v\, dv = 0 \qquad \text{pour} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \\ \text{ou que} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \rho \sin 2v\, dv = 0 \qquad \text{pour} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x}; \end{cases}$$

γ. Si

$$(28)\qquad \int_0^a (\rho - \rho_0)\frac{dr}{r}$$

est finie pour toutes les valeurs de v, pourvu que $\rho_0(v)$ satisfasse à l'égalité (20);

δ. Si $\dfrac{\partial \rho}{\partial s_1}$ existe en chaque point du voisinage de P_0, et si

$$(29)\qquad \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} u_2\, dv \int_h^a \frac{\partial \rho}{\partial s_1}\, dr$$

est finie et déterminée.

En effet, soit a' le rayon d'un cercle dont le centre se trouve au point P_0 et dans l'intérieur duquel la dérivée $\dfrac{\partial \rho}{\partial s_1}$ satisfasse aux conditions citées; on aura seulement à considérer la partie K'_h de K_h qui se rapporte à l'aire renfermée entre les deux circonférences de rayons h et a'. On trouvera

$$K_h = \int_{(h)}^{(a')} \rho \frac{\partial^2 \log \frac{1}{r}}{\partial s_1\, \partial s_2}\, d\omega = \int\!\!\int_{(h)}^{(a')} \rho \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s_2} u_1\, dl - \int_{(h)}^{(a')} \frac{\partial \rho}{\partial s_1} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s_2}\, d\omega,$$

où dl est l'élément de chacune des deux circonférences (h) et (a')

$$(30)\quad \therefore K_h = -\int_0^{2\pi} [\rho(a', v) - \rho(h, v)]\, u_1 u_2\, dv + \int_0^{2\pi} u_2\, dv \int_h^{a'} \frac{\partial \rho}{\partial s_1}\, dr.$$

Le deuxième membre de l'égalité (30) a une limite finie pour $\lim h = 0$; donc, etc.

ε. Si ρ est fonction de ξ seulement ou de η seulement, ξ et η étant les coordonnées rectangulaires du point Q, c'est-à-dire

$$(31)\qquad \begin{cases} \xi = x + r\cos v, \\ \eta = y + r\sin v. \end{cases}$$

En effet, soit $\rho = \rho(\eta)$; $\frac{\partial\rho}{\partial\xi}$ existe, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ existent d'après δ, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ existe (5°, remarque III).

7° Si la densité ρ est discontinue suivant les axes des x et des y et si elle prend des valeurs constantes ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4 dans les quatre quadrants autour de l'origine respective, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ existent, et l'on trouvera

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{\pi}{4}(-3\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - 3\rho_4), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \dfrac{\pi}{4}(-3\rho_2 + \rho_3 + \rho_4 - 3\rho_1), \end{cases}$$

les éléments dx et dy étant dirigés dans les directions positives des deux axes respectifs. De plus, on trouvera

$$K_{xy}^{(h)} = (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4)\log\frac{a}{h};$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ n'existent que si

$$(33)\qquad \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 = 0.$$

Dans ce cas, on aura

$$(34)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = 0.$$

Remarque IV. — Les égalités (32) font voir qu'en général la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_+}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ n'est pas égale à $-\frac{\partial}{\partial x_-}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, où les éléments dx_+ et dx_- sont dirigés en des directions opposées. Ces deux quantités sont égales, si

$$\rho_2 + \rho_3 = \rho_1 + \rho_4,$$

et dans ce cas on aura

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_4).$$

8° Si $\rho_0(v) =$ une constante ρ_1 pour $0 \leqq v \leqq \pi$ et une constante ρ_2 pour $\pi \leqq v \leqq 2\pi$, nous trouverons (18)

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} &L = -\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2)\cos(\psi_1 + \psi_2) - 2\pi\rho' \sin\psi_1 \sin\psi_2,\\ &\text{où}\\ &\rho' = \rho_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \psi_1 \leqq \pi \quad \text{et} \quad \rho' = \rho_2 \quad \text{pour} \quad \pi \leqq \psi_1 \leqq 2\pi. \end{aligned}\right.$$

5. *La fonction* ΔV. — Soit

$$(37)\qquad \Delta V = \lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0}} \left\{ \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1, y)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}\right] + \frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial V(x, y+h_2)}{\partial y} - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}\right]\right\}.$$

Si

$$(38)\qquad \lim \frac{h_2}{h_1} = \text{une quantité finie } \bar{c} \neq 0,$$

nous trouverons

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta v &= \log \bar{c} \int_0^{2\pi} \rho_0(v)\cos 2v\, dv + L_{xx} + L_{yy},\\ L_{xx} + L_{yy} &= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \rho_0(v)\sin 2v\, dv - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_0(v)\sin 2v\, dv\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\rho_0(v) + \rho_0\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right](\pi - v)\sin 2v\, dv. \end{aligned}\right.$$

Remarque I. — L'égalité (39) renferme, comme cas particulier, l'équation de Poisson. En effet, si ρ est continue au point P_0, ρ_0 est une constante, et nous trouverons

$$(40)\qquad \Delta V = -2\pi\rho_0.$$

Remarque II. — La fonction ΔV est toujours finie dans le cas (68), mais, en général, elle dépend de la quantité c. Elle en est indépendante, si

$$(27^*)\qquad \int_0^{2\pi} \rho_0(v)\cos 2v\, dv = 0,$$

ce qui arrivera, par exemple, toutes les fois où $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe, et toutes les fois où ρ est continue au point P_0 (40) quoique $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ n'existent pas séparément. Si, par exemple,

$$\rho = \frac{\cos^2 v}{\log \frac{1}{r}}, \tag{41}$$

on trouvera, pour $a > 1$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\pi}{2} \lim_{h=0} \log \frac{\log \frac{1}{h}}{\log \frac{1}{a}} = \infty, \tag{42}$$

quoique ρ soit continue pour $r = 0$. D'autre part, on trouvera pour le point P_0

$$\Delta V = 0, \tag{43}$$

pourvu que la condition (38) soit satisfaite.

Remarque III. — Plus généralement, nous pourrons définir

$$(37^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta V = \lim_{\substack{h_1=0 \\ h_2=0}} \Bigg\{ & \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x + h_1 \cos\psi_1, y + h_1 \sin\psi_1)}{\partial s_2} - \frac{\partial V(x, y)}{d s_2}\right] \\ & + \frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial V(x + h_2 \cos\psi', y + h_2 \sin\psi')}{\partial s''} - \frac{\partial V(x, y)}{\partial s''}\right]\Bigg\}, \\ & \psi' + \psi'' = \psi_1 + \psi_2 + \pi, \end{aligned} \right.$$

ψ_1, ψ_2, ψ', ψ'' étant les angles (x, ds_1), (x, ds_2), (x, ds'), (x, ds'') respectivement. Donc nous trouverons (18) et (19)

$$(39^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta V = \log \bar{c} & \int_0^{2\pi} \rho_0(v) \cos(2v - \psi)\, dv \\ & + (\psi' - \psi_1) \int_0^{2\pi} \rho_0(v) \sin(2v - \psi)\, dv \\ & - 2\pi \int_{\psi_1}^{\psi'} \rho_0(v) \sin(2v - \psi)\, dv, \\ \bar{c} = \lim_{\substack{h_1=0 \\ h_2=0}} \frac{h_2}{h_1}, & \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2; \end{aligned} \right.$$

ΔV est finie si c est finie et $\neq 0$. Dans le cas particulier où $h_2 = h_1$,

et

$$(44)\quad \begin{cases} \rho_0(v) = \text{const.}\,\rho_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \lambda' < v < \pi - \lambda \\ \text{et} \\ \rho_0(v) = \text{const.}\,\rho_2 \ \text{pour les autres valeurs de } v, \end{cases}$$

nous trouverons

$$(45)\quad \begin{cases} \Delta_{11} V \equiv \Delta V = -\pi\rho_1(c + c') + \dfrac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\psi' - \psi_1) \\ \qquad \times [\cos(2\lambda + \psi) - \cos(2\lambda' - \psi)] \\ \qquad \text{pour} \quad \lambda' \leqq \psi_1 \leqq \pi - \lambda \quad \text{et} \quad \lambda' \leqq \psi' \leqq \pi - \lambda, \\ \text{mais} \\ \Delta_{12} V \equiv \Delta V = -\pi\rho_1 c - \pi\rho_2 c' + \dfrac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\psi' - \psi_1) \\ \qquad \times [\cos(2\lambda + \psi) - \cos(2\lambda' - \psi)] - \pi(\rho_2 - \rho_1)\cos(2\lambda + \psi) \\ \qquad \text{pour} \quad \lambda' \leqq \psi_1 \leqq \pi - \lambda \quad \text{et} \quad \psi' > \pi - \lambda; \\ \qquad c = \cos(ds_1, ds_2), \qquad c' \equiv \cos(ds', ds''). \end{cases}$$

Enfin nous trouverons, si ρ est continue au point P_0,

$$(45^*)\qquad \Delta V = -\pi\rho_0(c + c').$$

4. *Existence de la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ *en un point quelconque.* — Supposons que le point P soit situé sur l'axe des x à la distance k de l'origine P_0 qui est le centre de l'aire circulaire considérée dont le rayon est a, et soit $k < a$. Décrivons autour du point P un cercle dont le rayon est h, $h < a - k$. Nous trouverons pour la quantité K_h, rapportée au point P, l'expression suivante,

$$(46)\qquad K_h = \int_{(h)}^{(a)} \rho \frac{\partial^2 \log \frac{1}{R}}{ds_1\, ds_2}\, dw = \int_{(h)}^{(a)} \rho(2v_1 v_2 - c)\frac{dw}{R^2},$$

où l'intégration s'étend sur la portion du cercle qui est comprise entre les deux circonférences, et où

$$(47)\quad \begin{cases} R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rku + k^2}, \\ u = \cos v, \\ v_1 = \cos(r, ds_1) = \dfrac{r\cos v - k}{R}\cos\psi_1 + \dfrac{r\sin v}{R}\sin\psi_1, \\ v_2 = \cos(r, ds_2) = \dfrac{r\cos v - k}{R}\cos\psi_2 + \dfrac{r\sin v}{R}\sin\psi_2, \\ c = \cos(ds_1, ds_2) = \cos(\psi_2 - \psi_1), \end{cases}$$

et

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} \therefore\ \mathrm{K}_h &= \mathrm{K}_{xx}^{(h)}\cos(\psi_1+\psi_2)+\mathrm{K}_{xy}^{(h)}\sin(\psi_1+\psi_2),\\ \mathrm{K}_{xx}^{(h)} &= \int_{(h)}^{(a)}\rho\left[\frac{2(ru-k)^2}{\mathrm{R}^2}-1\right]\frac{dw}{\mathrm{R}^2},\\ \mathrm{K}_{xy}^{(h)} &= 2\int_{(h)}^{(a)}\rho(ru-k)\,r\sin v\,\frac{dw}{\mathrm{R}^4}. \end{aligned}\right.$$

Nous pourrons écrire

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{K}_{xx}^{(h)} &= \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3,\\ \mathrm{I}_1 &\equiv \int_0^{2\pi}dv\int_0^{k-h}\rho\left[\frac{2(ru-k)^2}{\mathrm{R}^2}-1\right]\frac{r\,dr}{\mathrm{R}^2},\\ \mathrm{I}_2 &\equiv \int_0^{2\pi}dv\int_{k+h}^{a}\rho\left[\frac{2(ru-k)^2}{\mathrm{R}^2}-1\right]\frac{r\,dr}{\mathrm{R}^2},\\ \mathrm{I}_3 &\equiv \int_{k-h}^{k+h}r\,dr\int_{v_1}^{2\pi-v_1}\rho\left[\frac{2(ru-k)^2}{\mathrm{R}^2}-1\right]\frac{dv}{\mathrm{R}^2},\\ &r^2-2rk\cos v_1+k^2=h^2. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} r &= ks,\\ h &= k\alpha,\\ \mathrm{R} &= kp, \qquad \therefore\ p=\sqrt{s^2-2su+1},\\ \rho(r,v) &= \rho(r,v)+\rho(r,2\pi-v), \end{aligned}\right.$$

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \therefore\ \mathrm{I}_1 &= \int_0^{\pi}dv\int_0^{1-\alpha}\rho(ks,v)\left[\frac{2(su-1)^2}{p^2}-1\right]\frac{s\,ds}{p^2},\\ \mathrm{I}_2 &= \int_0^{\pi}dv\int_{1+\alpha}^{\frac{a}{k}}\rho(ks,v)\left[\frac{2(su-1)^2}{p^2}-1\right]\frac{s\,ds}{p^2},\\ \mathrm{I}_3 &= \int_{1-\alpha}^{1+\alpha}s\,ds\int_{v_1}^{\pi}\rho(ks,v)\left[\frac{2(su-1)^2}{p^2}-1\right]\frac{dv}{p^2},\\ &s^2-2s\cos v_1+1=\alpha^2. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} s &= 1-\sigma,\\ p &= \sqrt{\sigma^2+2(1-\sigma)(1-u)},\\ \therefore\ &\frac{1-u}{p^2}\leqq 1,\qquad \frac{\sigma}{p}\leqq 1. \end{aligned}\right.$$

et

$$\therefore \mathrm{I}_1 = \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho}(k - k\sigma, v)$$
$$\times \left[\frac{2(1-\sigma)^3(1-u)^2 + 4(1-\sigma)^2\sigma(1-u) + 2(1-\sigma)\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{1-\sigma}{\underline{p}^2} \right] dv.$$

Mais (52) les quantités

$$\frac{(1-u)^2}{\underline{p}^4} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma^2(1-u)}{\underline{p}^4}$$

ont des limites finies pour $\lim \alpha = 0$, et nous trouverons

$$\int_\alpha^1 \sigma\, d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho} \frac{dv}{\underline{p}^2} = \pi \bar{\rho}' \log(2-\alpha), \tag{53}$$

$\bar{\rho}'$ étant une valeur moyenne de $\bar{\rho}$. Par suite, nous pourrons écrire, le second membre de l'égalité (53) ayant une limite finie,

$$\mathrm{I}_1 = \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho}(k - k\sigma, v) \left[\frac{2\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{1}{\underline{p}^2} \right] dv + a_1, \qquad \lim_{\alpha=0} a_1 \text{ finie.} \tag{54}$$

Posons

$$\bar{p} = \sqrt{v^2 + \sigma^2}, \qquad \therefore \bar{p} > \underline{p}. \tag{55}$$

Posons de plus

$$2(1-u) = v^2 - v^4 \mu(v), \qquad \therefore \mu(0) = \frac{1}{12},$$
$$\therefore 0 < \frac{1}{\underline{p}^2} - \frac{1}{\bar{p}^2} = \frac{v^4 \mu(v)}{\underline{p}^2 \bar{p}^2} + \frac{2\sigma(1-u)}{\underline{p}^2 \bar{p}^2}.$$

Le premier terme du dernier membre reste toujours plus petit qu'une constante finie. Le second terme est plus petit que $\frac{2\sigma}{\underline{p}^2}$; par suite, en ayant égard à l'égalité (53), nous trouverons

$$\lim_{\alpha=0} \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \left(\frac{1}{\underline{p}^2} - \frac{1}{\bar{p}^2} \right) dv = \text{une quantité finie.} \tag{56}$$

De plus, nous aurons (52)

$$\frac{\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{\sigma^2}{\overline{p}^4} = \left(\frac{\sigma^2}{\underline{p}^2} + \frac{\sigma^2}{\overline{p}^2}\right)\left(\frac{1}{\underline{p}^2} - \frac{1}{\overline{p}^2}\right) \leq 2\left(\frac{1}{\underline{p}^2} - \frac{1}{\overline{p}^2}\right),$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \left(\frac{\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{\sigma^2}{\overline{p}^4}\right) dv = \text{une quantité finie.}$$

Posons

$$(57) \qquad \bar{\mathrm{I}}_1 \equiv \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \rho(k - k\sigma, v)\left(\frac{2\sigma^2}{\overline{p}^4} - \frac{1}{\overline{p}^2}\right) dv,$$

$$\therefore \mathrm{I}_1 - \bar{\mathrm{I}}_1 = 2\int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho}\left(\frac{\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{\sigma^2}{\overline{p}^4}\right) dv - \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho}\left(\frac{1}{\underline{p}^2} - \frac{1}{\overline{p}^2}\right) dv + a_1$$

$$= 2\rho_1' \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \left(\frac{\sigma^2}{\underline{p}^4} - \frac{\sigma^2}{\overline{p}^4}\right) dv - \rho_1'' \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \left(\frac{1}{\underline{p}^2} - \frac{1}{\overline{p}^2}\right) dv + a_1,$$

$\overline{\rho_1'}$ et $\overline{\rho_1''}$ étant des valeurs moyennes de $\bar{\rho}$,

$$(58) \qquad \therefore \lim_{\alpha=0}(\mathrm{I}_1 - \bar{\mathrm{I}}_1) = \text{une quantité finie.}$$

Nous pourrons traiter l'intégrale I_2 (51) d'une manière analogue; en posant

$$(59) \qquad \begin{cases} s = 1 + \sigma, \\ \underset{+}{p} = \sqrt{\sigma^2 + 2(1+\sigma)(1-u)}, \end{cases}$$

nous trouverons

$$(60) \qquad \mathrm{I}_2 = \int_\alpha^{\frac{a}{k}-1} d\sigma \int_0^\pi \bar{\rho}(k + k\sigma_1 v)\left(\frac{2\sigma^2}{\underset{+}{p}^4} - \frac{1}{\underset{+}{p}^2}\right) dv + a_2, \qquad \lim_{\alpha=0} a_2 \text{ finie.}$$

Or

$$0 \leq \frac{1}{\underset{-}{p}^2} - \frac{1}{\underset{+}{p}^2} = \frac{4\sigma(1-u)}{\underset{-}{p}^2 \underset{+}{p}^2} \leq \frac{4\sigma}{\underset{-}{p}^2},$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \left(\frac{1}{\underset{-}{p}^2} - \frac{1}{\underset{+}{p}^2}\right) dv < 4 \lim_{\alpha=0} \int_\alpha^1 \sigma\, d\sigma \int_0^\pi \frac{dv}{\underset{-}{p}^2} = 4\pi \log 2$$

et

$$0 \leq \frac{\sigma^2}{\underset{-}{p}^4} - \frac{\sigma^2}{\underset{+}{p}^4} = \left(\frac{\sigma^2}{\underset{-}{p}^2} + \frac{\sigma^2}{\underset{+}{p}^2}\right)\left(\frac{1}{\underset{-}{p}^2} - \frac{1}{\underset{+}{p}^2}\right) \leq 2\left(\frac{1}{\underset{-}{p}^2} - \frac{1}{\underset{+}{p}^2}\right) \cdots$$

Donc nous trouverons, comme dans le cas précédent,

$$\lim_{\alpha=0}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}'_2) = \text{une quantité finie},$$

où

$$\mathrm{I}'_2 = \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \rho(k + k\sigma, v)\left(\frac{2\sigma^2}{p^4} - \frac{1}{p^2}\right) dv.$$

Mais (58)

$$\lim_{\alpha=0}(\mathrm{I}'_2 - \overline{\mathrm{I}_2}) = \text{une quantité finie},$$

où

(61)
$$\overline{\mathrm{I}_2} = \int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \rho(k + k\sigma, v)\left(\frac{2\sigma^2}{\overline{p}^4} - \frac{1}{\overline{p}^2}\right) dv,$$

(62)
$$\therefore \lim_{\alpha=0}(\mathrm{I}_2 - \overline{\mathrm{I}_2})^a = \text{une quantité finie}.$$

L'intégrale I_3 peut s'écrire

$$\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}' + \mathrm{I}'',$$

$$\mathrm{I}' \equiv \int_{1-\alpha}^1 s\,ds \int_{v_1}^\pi \rho\left[\frac{2(su-1)^2}{p^4} - \frac{1}{p^2}\right] dv,$$

$$\mathrm{I}'' \equiv \int_1^{1+\alpha} s\,ds \int_{v_1}^\pi \rho\left[\frac{2(su-1)^2}{p^4} - \frac{1}{p^2}\right] dv.$$

Si, dans l'intégrale I', nous posons

$$s = 1 - \sigma, \qquad p = p,$$

et en employant la formule

(63)
$$\lim_{\alpha=0}\int_0^\alpha d\sigma \int_{v_1}^\pi \sigma\frac{dv}{\overline{p}^2} = \lim_{\alpha=0}\int_0^\alpha \frac{d\sigma}{1 - \dfrac{\sigma}{2}}\int_{v_1}^\pi \operatorname{tang}\left(\frac{2-\sigma}{\sigma}\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right) = 0,$$

nous trouverons, comme dans le cas de l'intégrale I_1,

(64)
$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{\alpha=0}(\mathrm{I}' - \overline{\mathrm{I}'}) = 0 \\ \text{ou} \\ \overline{\mathrm{I}'} = \displaystyle\int_0^\alpha d\sigma \int_{v_1}^\pi \rho(k - k\sigma, v)\left(\frac{2\sigma^2}{\overline{p}^4} - \frac{1}{\overline{p}^2}\right) dv, \\ \sigma^2 + 2(1-\sigma)(1-\cos v_1) = \alpha^2, \\ \overline{p}^2 = v^2 + \sigma^2. \end{array}\right.$$

Posons

$$\sigma = \alpha\tau, \qquad v = \alpha\theta, \quad v_1 = \alpha\theta_1, \qquad 2(1-\cos v) = v^2\lambda(v), \qquad \therefore \lambda(0) = 1,$$

$$\therefore \overline{\mathrm{I}'} = \int_0^1 d\tau \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \rho(k - k\alpha\tau, \alpha\theta)\left[\frac{2\tau^2}{(\theta^2+\tau^2)^2} - \frac{1}{\theta^2+\tau^2}\right] d\theta,$$

$$\tau^2 + (1-\alpha\tau)\theta_1^2\lambda(\alpha\theta_1) = 1,$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \overline{\mathrm{I}'} = \overline{\rho_k}\int_0^1 d\tau \int_{\theta_0}^{\infty}\left[\frac{2\tau^2}{(\theta^2+\tau^2)^2} - \frac{1}{\theta^2+r^2}\right] d\theta = \overline{\rho_k}\int_0^1 d\tau \bigg|_{\theta_0}^{\infty} \frac{\theta}{\theta^2+\tau^2},$$

$$\overline{\rho_k} \equiv \lim_{\alpha=0} \bar{\rho}(k - k\alpha\tau, \alpha\theta),$$

$$\theta_0 = \lim_{\alpha=0}\theta_1 = \sqrt{1-\tau^2},$$

$$(65) \qquad \therefore \lim_{\alpha=0} \overline{\mathrm{I}'} = -\frac{\pi}{4}\overline{\rho_k}.$$

En traitant l'intégrale I″ de la même manière, nous trouverons

$$(66) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\alpha=0} \mathrm{I}_3 = -\dfrac{\pi}{4}\mathrm{P}_k, \\ \mathrm{P}_k = \lim\limits_{\alpha=0}\left[\bar{\rho}(k + k\alpha\tau, \alpha\theta) + \rho(k - k\alpha\tau, \alpha\theta)\right]. \end{cases}$$

Si enfin nous traitons la quantité $\mathrm{K}_{xy}^{(h}$ de la même manière, nous obtiendrons le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la dérivée* $\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial s_1\, \partial s_2}$ *au point* $\mathrm{P}(k, 0)$, $k > 0$ *est que la quantité*

$$(67) \qquad \mathrm{H} \equiv \lim_{\alpha=0} \mathrm{H}^{(\alpha)}$$

soit finie, où

$$(68) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}^{(\alpha)} = \mathrm{H}_{xx}^{(\alpha)}\cos(\psi_1+\psi_2) + \mathrm{H}_{xy}^{(\alpha)}\sin(\psi_1+\psi_2), \\ \mathrm{H}_{xx}^{(\alpha)} = \displaystyle\int_\alpha^1 d\sigma \int_0^\pi \underset{+}{\mathrm{P}}\,\frac{\sigma^2 - v^2}{\bar{p}^4}\, dv, \\ \mathrm{H}_{xy}^{(\alpha)} = 2\displaystyle\int_\alpha^1 \sigma\, d\sigma \int_0^\pi \underset{-}{\mathrm{P}}\,\frac{v\, dv}{\bar{p}^4}, \\ \bar{p} = \sqrt{v^2+\sigma^2}, \\ \underset{+}{\mathrm{P}} = \rho(k + k\sigma, v) + \rho(k + k\sigma, 2\pi - v) \\ \qquad\qquad + \rho(k - k\sigma, v) + \rho(k - k\sigma, 2\pi - v), \\ \underset{-}{\mathrm{P}} = \rho(k + k\sigma, v) - \rho(k + k\sigma, 2\pi - v) \\ \qquad\qquad - \rho(k - k\sigma, v) + \rho(k - k\sigma, 2\pi - v). \end{cases}$$

Remarque I. — La partie de K_{xy} qui correspond à $\lim_{\alpha=0} I_3$ est $\equiv \frac{1}{2} P'_h$, $P'_h \equiv \lim_{\alpha=0} P$ pour $\sigma = \alpha\tau$ et $v = \alpha\theta$.

Remarque II. — Nous pourrons remplacer H (67) par la quantité H′, où

$$
(68') \quad \left\{
\begin{aligned}
& H' \equiv \lim_{\alpha=0} H'^{(\alpha)}, \\
& H'^{(\alpha)} \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_\alpha^1 P' \frac{dp}{p}, \\
& P' \equiv \quad [\rho(k + k\sigma, v) + \rho(k - k\sigma, 2\pi - v)] \cos(2\varphi - \psi_1 - \psi_2) \\
& \qquad + [\rho(k + k\sigma, 2\pi - v) + \rho(k - k\sigma, v)] \cos(2\varphi + \psi_1 + \psi_2), \\
& \sigma = p \cos\varphi, \\
& v = p \sin\varphi.
\end{aligned}
\right.
$$

Cas particuliers. — 1° Si la fonction ρ est indépendante de v, on trouvera que la quantité H est finie. Dans ce cas la dérivée existe aussi à l'origine.

2° Si la fonction ρ est indépendante de r, on trouvera aussi que la quantité H est finie. Pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}$ existe aussi à l'origine il faut et il suffit que la fonction $\rho(v)$ satisfasse à l'égalité (20*).

5. *Continuité de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}$. — *Cas particulier :* La fonction ρ est indépendante de r. Si nous posons

$$
\begin{aligned}
(69) \quad \varphi(s) \equiv & \int \left[\frac{2(su-1)^2}{p^4} - \frac{1}{p^2} \right] s \, ds \\
= & (2u^2 - 1) \log p + \frac{su(3 - 4u^2) + 2u^2 - 1}{p^2} - 2u(1 - u^2) \int_0^s \frac{ds}{p^2},
\end{aligned}
$$

nous trouverons (51) et (66)

$$
(70) \quad \left\{
\begin{aligned}
& K_{xx}^{(h)} = I_1 + I_2 + I_3, \\
& I_1 + I_2 = \int_0^{2\pi} \rho(v) \left[\varphi\left(\frac{a}{k}\right) - \varphi(1 + \alpha) + \varphi(1 - \alpha) - \varphi(0) \right] dv, \\
& \lim_{\alpha=0} I_3 = - \frac{\pi}{2} (\rho_1 + \rho_2), \\
& \text{où} \\
& \rho_1 = \lim_{v=0} \rho(v), \qquad v > 0, \\
& \rho_2 = \lim_{v=2\pi} \rho(v), \qquad v < 2\pi.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$(71)\quad \begin{cases} I_\alpha = \int_0^{2\pi} \rho(v)\left[\varphi(1-\alpha) - \varphi(1+\alpha)\right] dv, \\ p_1 = \sqrt{\alpha^2 + 2(1-\alpha)(1-u)}, \qquad p_2 = \sqrt{\alpha^2 + 2(1+\alpha)(1-u)}, \\ \qquad \therefore p_1 \leqq p_2, \qquad \dfrac{1-u}{p_2^2} \leqq \dfrac{1-u}{p_1^2} \leqq 1, \\ \bar\rho(v) = \rho(v) + \rho(2\pi - v), \qquad \therefore \lim_{v=0} \bar\rho(v) = \rho_1 + \rho_2 \quad \text{pour} \quad v > 0, \end{cases}$$

$$(72)\quad \therefore I_\alpha = \int_0^{\pi} \bar\rho(v)\left[\log\frac{p_1}{p_2} + \alpha\left(\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2}\right)\right] dv + \eta_\alpha, \qquad \lim_{\alpha=0} \eta_\alpha = 0.$$

Or

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{1 - \frac{4\alpha(1-u)}{p_2^2}}, \qquad \therefore \lim_{\alpha=0} \frac{p_1}{p_2} = 1.$$

De plus, nous trouverons

$$\lim_{\alpha=0} \alpha \int_0^{\pi} \bar\rho(v) \frac{dv}{p_2^2} = \lim_{\alpha=0} \alpha \int_0^{\pi} \bar\rho(v) \frac{dv}{p^2} = \lim_{\alpha=0} \alpha \int_0^{\varepsilon} \bar\rho(v) \frac{dv}{p_1^2} = \lim_{\alpha=0} \bar\rho' \alpha \int_0^{\varepsilon} \frac{dv}{p_1^2}$$
$$= \lim_{\alpha=0} \rho' \frac{2}{2-\alpha_0} \Big/_0^{\varepsilon} \operatorname{tang}\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \operatorname{tang}\frac{v}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2);$$

$\bar\rho'$ étant une valeur moyenne de $\bar\rho$ pour $0 \leqq v \leqq \varepsilon$, ε étant une constante positive quelque petite qu'elle soit,

$$(73)\qquad \therefore \lim_{\alpha=0} I_\alpha = \pi(\rho_1 + \rho_2),$$

$$(74)\qquad \therefore K_{xx} = \int_0^{\pi} \bar\rho(v)\left[\varphi\left(\frac{a}{k}\right) - \varphi(0)\right] dv + \frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2).$$

De même, nous trouverons

$$(75)\quad \begin{cases} K_{xy} = \int_0^{\pi} \bar{\bar\rho}(v)\left[\varphi_1\left(\frac{a}{k}\right) - \varphi_1(0)\right] \sin v \, dv, \\ \varphi_1(s) = 2\int (su-1)s^2 \dfrac{ds}{p^4} = 2u \log p + \dfrac{s(1-4u^2)+2u}{p^2} + (2u^2-1)\int_0^s \dfrac{ds}{p^2}, \\ \bar{\bar\rho}(v) = \rho(v) - \rho(2\pi - v). \end{cases}$$

En effet, posons

$$I'_\alpha = \int_0^{\pi} \bar{\bar\rho}(v)\left[\varphi_1(1-\alpha) - \varphi_1(1+\alpha)\right] \sin v \, dv,$$

et

$$\therefore\ I_\alpha = \int_0^\pi \rho(v)\left[3\alpha\left(\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}\right)-\left(\frac{1}{p_1^2}-\frac{1}{p_2^2}\right)\right]\sin v\,dv+\eta_\alpha,\quad \lim_{\alpha}\eta_\alpha = 0,$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0} I_\alpha = 6\lim_{\alpha=0}\alpha\overline{\overline{\rho'}}\sin v'\int_0^\varepsilon \frac{dv}{p_1^2}-\frac{1}{2}\lim_{\alpha=0}\overline{\overline{\rho''}}\int_0^\pi\left(\frac{\log p_1}{1-\alpha}-\frac{\log p_2}{1+\alpha}\right)=0,$$

$\overline{\overline{\rho'}}$, $\overline{\overline{\rho''}}$ et v' étant des valeurs moyennes de ρ et de v pour $0 \leq v \leq \varepsilon$, ε étant une constante quelque petite qu'elle soit.

De plus, nous avons trouvé (nº **5**, remarque I) que la partie de K_{xy} qui correspond à $\lim\limits_{\alpha=0} I$ est $= \frac{1}{2}p'_k$, et nous aurons

$$p'_k = \rho_1 - \rho_2 - \rho_1 + \rho_2 = 0.$$

Donc, etc.

Pour de grandes valeurs de s nous pourrons écrire

$$\varphi(s) = (2u^2-1)\log s - 2u(\pi - v)\sin v + \frac{1}{s}P, \qquad \lim_{s=\infty} P \text{ finie},$$

$$\varphi_1(s) = 2u\log s + \frac{2u^2-1}{\sin v}(\pi - v) + \frac{1}{s}P_1, \qquad \lim_{s=\infty} P_1 \text{ finie};$$

par suite, nous trouverons, pour de petites valeurs de k,

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} K_{xx} &= \left(\log\frac{a}{k}-1\right)\int_0^{2\pi}\rho(v)\cos 2v\,dv \\ &\quad -\int_0^{2\pi}\rho(v)(\pi-v)\sin 2v\,dv+\frac{\pi}{2}(\rho_1+\rho_2)+kQ, \qquad \lim_{k=0} Q \text{ finie}, \\ K_{xy} &= \left(\log\frac{a}{k}-1\right)\int_0^{2\pi}\rho(v)\sin 2v\,dv \\ &\quad +\int_0^{2\pi}\rho(v)(\pi-v)\cos 2v\,dv+kQ_1, \qquad \lim_{k=0} Q_1 \text{ finie}, \end{aligned}\right.$$

$$(77)\quad \therefore\ K_{s_1 s_2} = \left(\log\frac{a}{k}-1\right)\int_0^{2\pi}\rho(v)\cos(2v-\psi_1-\psi_2)\,dv$$
$$-\int_0^{2\pi}\rho(v)(\pi-v)\sin(2v-\psi_1-\psi_2)\,dv$$
$$+\frac{\pi}{2}(\rho_1+\rho_2)\cos(\psi_1+\psi_2)+kQ',$$

où Q' est continue par rapport à k, et $\lim\limits_{k=0} Q'$ est finie.

Prenons pour un moment le point $P(k, o)$ pour centre d'un système de coordonnées polaires $(R, \bar{v})$, $\bar{v}$ étant l'angle que fait le rayon vecteur PQ avec l'axe des x positifs. Nous trouverons (36)

$$\rho_0 = \lim_{R=0} \rho = \rho_1 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq \bar{v} \leqq \pi,$$
$$= \rho_2 \qquad \text{pour} \qquad \pi \leqq \bar{v} \leqq 2\pi,$$

$$(78) \qquad \therefore L = -\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2)\cos(\psi_1 + \psi_2) - 2\pi\rho_1 \sin\psi_1 \sin\psi_2$$
$$= -\frac{\pi}{2}(\rho_2 - \rho_1)\cos(\psi_1 + \psi_2) - \pi\rho_1 \cos(\psi_2 - \psi_1),$$

pour

$$0 \leqq \psi_1 \leqq \pi.$$

Pour

$$\pi \leqq \psi_1 \leqq 2\pi$$

il faut échanger ρ_1 et ρ_2 dans la formule (78).

Il suit des égalités (77) et (78) que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}$ est continue le long de l'axe des x pour $a > k > o$. Pour que cette dérivée soit finie à l'origine, il faut et il suffit que l'égalité (20*) soit satisfaite, et dans ce cas la valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}$ est

$$(79) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2} &= -\int_0^{2\pi} \rho(v)(\pi - v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv \\ &\quad - 2\pi\rho' \sin\psi_1 \sin\psi_2 + kQ' \quad \text{au point} \quad P(k, o), \quad k > o, \\ &\text{où} \\ \rho' = \rho_1 \quad &\text{pour} \quad 0 \leqq \psi_1 \leqq \pi \quad \text{et} \quad \rho' = \rho_2 \quad \text{pour} \quad \pi \leqq \psi_1 \leqq 2\pi, \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}\right)_0 &= -\int_0^{2\pi} \rho(v)(\pi - v + \psi)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv \\ &\quad + 2\pi \int_0^{\psi_1} \rho(v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv \quad \text{à l'origine}, \quad 0 \leqq \psi_1 \leqq 2\pi. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{k=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \, \partial s_2}\right)_0 = \Gamma, \\ &\therefore \Gamma = \psi_1 \int_0^{2\pi} \rho(v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv \\ &\qquad - 2\pi \int_0^{\psi_1} \rho(v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv - 2\pi\rho' \sin\psi_1 \sin\psi_2. \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la densité ρ est fonction de l'azimut v seulement, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ est continue suivant chaque rayon vecteur, sauf à l'origine. Si $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ existe à l'origine, la discontinuité dans la direction de l'axe des $x\,y$ est* égale à Γ (80).

Cas particuliers. — 1° Pour $\psi_2 = 0$, nous trouverons (21)

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial s_1}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial x}\right)_0 = \Gamma = \lim_{k=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial x} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial x}\right)_0,$$

(81) $$\therefore \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial x} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial s_1}\right)_0.$$

2°

$$\Gamma = 0.$$

$$\rho(v) = \rho_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq v \leq \pi,$$
$$= \rho_2 \quad \text{pour} \quad \pi \leq v \leq 2\pi,$$

trouverons

$$\Gamma = 0.$$

Remarque I. — Soit K_h^0 la valeur de K_h au point P_0; on aura

(84) $$\lim_{\substack{h=0\\k=0}} (K - K_h^0) = \lim_{\substack{h=0\\k=0}} \left(\log\frac{h}{k} - 1\right) \int_0^{2\pi} \rho(v) \cos(2v - \psi_1 + \psi_2)\, dv$$
$$- \int_0^{2\pi} \rho(v)(\pi - v) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv$$
$$+ \frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) \cos(\psi_1 + \psi_2).$$

Par suite, si $\lim\limits_{\substack{h=0\\k=0}} \frac{h}{k}$ est finie et $\neq 0$, le premier membre de l'égalité (84) existe même dans le cas où la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ n'existe pas à l'origine.

Remarque II. — Si $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ existe, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence à l'origine de la troisième dérivée $\frac{\partial^3 V}{\partial x\, \partial s_1\, \partial s_2}$ est

(85) $$\Gamma = 0,$$

et l'on trouvera (79)

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x\,\partial s_1\,\partial s_2} = \lim_{h=0} Q'. \tag{86}$$

II. *Cas général.* — Si la densité ρ est continue par rapport à r, nous disons que la quantité (68)

$$\lim_{h=0}(K_h - H^{(\alpha)})$$

est continue par rapport à k pour $k > 0$. En effet, soit $K'_{h'}$ la quantité qui correspond à K_h au point $P(k', o)$, $k' > 0$, lorsqu'on y écrit h' au lieu de h. La quantité $K'_{h'}$ est une intégrale de même forme que K_h, mais où l'on a remplacé $\rho \equiv \rho(ks, v)$ par

$$\rho' \equiv \rho(k's, v), \tag{87}$$

et α par $\alpha' \equiv \frac{h'}{k'}$. En choisissant

$$h' = \frac{k'}{k} h, \tag{88}$$

nous aurons $\alpha' = \alpha$. Dans ce cas, la quantité

$$\mathfrak{K}_h \equiv K'_{h'} - K_h - \int_0^{2\pi} dv \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{a}{k'}} \rho'(2v_1v_2 - c)\frac{s\,ds}{p^2} \tag{89}$$

peut être écrite comme une intégrale de même forme que K_h, mais où la fonction ρ est remplacée par $\rho' = \rho$. En traitant la quantité $\mathfrak{K}_h$ de la même manière que nous avons traité la quantité K_h dans le numéro précédent, nous trouverons que les limites pour $\alpha = 0$ de tous les termes, outre ceux qui correspondent à $H^{(\alpha)}$ (68), peuvent être mises sous la forme

$$(\rho' - \rho)_m a', \qquad \lim_{\alpha=0} a' \text{ finie},$$

où $(\rho' - \rho)_m$ est une valeur moyenne de $\rho' - \rho$. Mais $\rho' - \rho$ est, par hypothèse, infiniment petite en même temps que $k' - k$, et cela arrive aussi pour le troisième terme de l'égalité (89),

$$\therefore \lim_{k'=k}\lim_{h'=0}(K'_{h'} - H'^{(\alpha)}) = \lim_{h=0}(K_h - H^{(\alpha)}), \tag{90}$$

ce qu'il fallait démontrer, $H'^{(\alpha)}$ étant la quantité qui correspond à $H^{(\alpha)}$

pour le point $(k', 0)$. De plus, nous trouverons que L a la même valeur (78) que dans le cas particulier I. Cette quantité est aussi continue, ρ_1 et ρ_2 étant continues par hypothèse. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction ρ est continue le long de chaque rayon vecteur, la condition nécessaire et suffisante pour qu'en un point de l'axe des x qui n'est pas l'origine la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit continue dans la direction de cet axe, est que la quantité* H (67) *soit continue en ce point dans la même direction.*

Pour l'étude du cas $k = 0$, nous nommerons $\overline{K_h}$ ce que deviendra K_h au point $P(k, 0)$, si nous y remplaçons $\rho(ks, v)$ par $\rho_0(v)$. En traitant la quantité

$$K_h - \overline{K_h} - \int_0^{2\pi} dv \int_w^{\frac{a}{k}} (\rho - \rho_0)(2 v_1 v_2 - c) \frac{s\, ds}{p^2}, \qquad w > 1,$$

de la même manière que nous venons de traiter la quantité $\mathfrak{K}_h$ (89), nous trouverons que les limites pour $\alpha = 0$ de tous les termes, sauf ceux qui correspondent à $H^{(\alpha)}$ (68), sont infiniment petites en même temps que k. Pour de grandes valeurs de s, nous pourrons écrire (47)

$$(2 v_1 v_2 - c) \frac{s}{p^2} = (2 u_1 u_2 - c) \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} P, \qquad \lim_{s=\infty} P \text{ finie};$$

par suite, nous aurons

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} & K_h - \overline{K_h} = H^{(\alpha)} - \overline{H^{(\alpha)}} + \int_0^{2\pi} (2 u_1 u_2 - c)\, dv \int_k^a [\rho(r, v) - \rho_0(v)] \frac{dr}{r} + b_h, \\ & \lim_{h=0} b_h \equiv b, \qquad \lim_{k=0} b = 0, \end{aligned} \right.$$

$\overline{H^\alpha}$ étant ce que deviendra $H^{(\alpha)}$ lorsqu'on y remplace ρ par $\rho_0(v)$. Si $\overline{K_h^0}$ est la valeur de $\overline{K_h}$ à l'origine, nous aurons (77)

$$(92) \quad \begin{aligned} \overline{K_h} - \overline{K_h^0} = & \left(\log \frac{h}{k} - 1\right) \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(2 u_1 u_2 - c)\, dv \\ & - \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(\pi - v) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\ & + \frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) \cos(\psi_1 + \psi_2) + b'_h, \qquad \lim_{h=0} b'_h = b', \qquad \lim_{k=0} b' = 0. \end{aligned}$$

Enfin, soit K_h^0 la valeur de K_h à l'origine,

$$(93) \qquad \therefore K_h^0 - \overline{K_h^0} = \int_0^{2\pi} (2u_1u_2 - c)\,dv \int_h^a (\rho - \rho_0)\frac{dr}{r}.$$

Des égalités (91), (92) et (93) nous tirons

$$(94) \quad K_h - K_h^0 = H^{(\alpha)} - \overline{H^{(\alpha)}} - \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(2u_1u_2 - c)\,dv$$

$$- \int_0^{2\pi} (2u_1u_2 - c)\,dv \int_h^k \rho\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi} \rho_0(v)(\pi - v)\sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\,dv$$

$$+ \frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2)\cos(\psi_1 + \psi_2) + (b_h + b'_h).$$

La quantité L ayant la même valeur que dans le cas particulier I, nous trouverons que nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction ρ est continue par rapport à r, et si la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ existe à l'origine, la condition nécessaire et suffisante pour que cette dérivée y soit continue dans la direction de l'axe des x positifs est*

$$(95) \qquad \lim_{k=0} H - \overline{H} + \Gamma = 0, \qquad \overline{H} = \lim_{\alpha=0} \overline{H^{(\alpha)}},$$

où Γ *est donnée par l'égalité* (80) *et* $\overline{H^{(\alpha)}}$ *est ce que deviendra* $H^{(\alpha)}$ *lorsqu'on y remplace* $\rho(r, v)$ *par* $\rho_0(v)$.

6. *La dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ *au bord de la surface.* — Nous supposerons que le point P_0 est situé sur la ligne qui sépare l'aire plane en deux parties dont les densités sont constantes et égales à ρ_1 et ρ_2 respectivement, et nous considérerons seulement une partie circulaire de cette aire, dont le centre se trouve au point P_0 et dont le rayon est a. Si la ligne de séparation est une droite qui passe par le point P_0, nous trouverons, en posant $\rho = \rho_1$ pour $0 \leqq v \leqq \pi$ et $\rho = \rho_2$ pour $\pi \leqq v \leqq 2\pi$,

$$K_h = 0,$$

$$(96) \qquad \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2} = L,$$

où la valeur de L est donnée par la formule (36). Si, au contraire, la ligne de séparation des deux densités n'est pas droite, nous nommerons

$v_1(r)$ et $v_2(r)$ les valeurs limites de v, et soit $\rho = \rho_1$ pour $v_1 \leqq v \leqq v_2$,

$$\begin{aligned}
\therefore\ \mathrm{K}_h = {}& \rho_2 \int_h^a \frac{dr}{r} \int_0^{v_1} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\
&+ \rho_1 \int_h^a \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{v_2} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\
&+ \rho_2 \int_h^a \frac{dr}{r} \int_{v_2}^{2\pi} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv,
\end{aligned}$$

en supposant que le cercle $r = \text{const.}$ ne rencontre chaque ligne de séparation qu'en un seul point. Or

$$\rho_2 \int_h^a \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv = 0,$$

$$(97) \qquad \therefore\ \mathrm{K}_h = (\rho_1 - \rho_2) \int_h^a \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{v_2} \cos(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv.$$

Posons

$$(98) \qquad \pi - v_2 = v_3,$$

$$(97^*) \qquad \therefore\ \mathrm{K}_h = (\rho_2 - \rho_1) \int_h^a \cos(v_1 - v_3 - \psi_1 - \psi_2) \sin(v_1 + v_3) \frac{dr}{r}.$$

Posons, de plus [(18), (22)],

$$(99) \qquad \lim_{r=0} v_1 = v_1^0, \qquad \lim_{r=0} v_2 = v_2^0, \qquad \cos(\psi_2 - \psi_1) = c.$$

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned}
\therefore\ \mathrm{L} = {}& -\pi\rho_2 c + (\rho_2 - \rho_1) \int_{v_1^0}^{v_2^0} (\pi - v + \psi_1) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv \\
&+ 2\pi \int_0^{\psi_1} (\rho - \rho_2) \sin(2v - \psi_1 - \psi_2)\, dv,
\end{aligned} \right.$$

où $\rho = \rho_1$ pour $v_1^0 \leqq v \leqq v_2^0$ et $= \rho_2$ pour les valeurs de $v \leqq v_1^0$ et $\geqq v_2^0$.

En intégrant, nous trouverons

$$(100^*) \quad \left\{ \begin{aligned}
& \mathrm{L} = -\pi\rho_2 c + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1) \\
& \qquad \times [2(\pi + \psi_1) \sin(v_1^0 + v_2^0 - \psi) \sin(v_2^0 - v_1^0) + v_2^0 \cos(2v_2^0 - \psi) \\
& \qquad\qquad - v_1^0 \cos(2v_1^0 - \psi) - \cos(v_1^0 + v_2^0 - \psi) \sin(v_2^0 - v_1^0)] + \mathrm{B}, \\
& \quad \mathrm{B} = \pi(\rho_2 - \rho_1) [c - \cos(2, v_1^0 - \psi)] \qquad \text{pour} \qquad v_1^0 < \psi_1 < v_2^0, \\
& \text{mais} \\
& \qquad \mathrm{B} = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < \psi_1 < v_1^0, \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2.
\end{aligned} \right.$$

Cas particuliers : 1° *Point régulier.* — Soient $v_1^0 = 0$, $v_2^0 = \pi$. Dans ce cas, le bord a, au point P_0, une tangente unique bien déterminée, et la valeur de L est donnée par la formule (36). La quantité $K_{s_1 s_2}$ est finie et déterminée si

$$(101)\qquad \left\{\begin{array}{lll} & & \displaystyle\int_0^a (v_1 + v_2)\frac{dr}{r} \text{ est finie et déterminée,} \\ \text{ou si} & & \\ \psi = \dfrac{\pi}{2} & \text{et} & \displaystyle\int_0^a (v_1^2 - v_2^2)\frac{dr}{r} \text{ est finie et déterminée.} \end{array}\right.$$

2° *Point de rebroussement.* — Soient $v_1^0 = v_2^0 = \frac{\pi}{2}$. Posons

$$(102)\qquad v_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1,\qquad v_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_2,\qquad \therefore \lim_{r=0}\varphi_1 = \lim_{r=0}\varphi_2 = 0.$$

Nous trouverons [(22), (97*)]

$$(103)\qquad \left\{\begin{array}{l} L = -\pi\rho_2 c, \\ K_h = (\rho_2 - \rho_1)\displaystyle\int_h^a \cos(\psi + \varphi_1 - \varphi_2)\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\frac{dr}{r}; \end{array}\right.$$

par suite, la quantité $K_{s_1 s_2}$ est finie et déterminée si

$$(104)\qquad \left\{\begin{array}{lll} & & \displaystyle\int_0^a (\varphi_1 + \varphi_2)\frac{dr}{r} \text{ est finie et déterminée,} \\ \text{ou si} & & \\ \psi = \dfrac{\pi}{2} & \text{et} & \displaystyle\int_0^a (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)\frac{dr}{r} \text{ est finie et déterminée.} \end{array}\right.$$

3° *Point saillant.* — Soit $v_2^0 - v_1^0 \neq \pi$ et $\neq 0$. Posons

$$(105)\qquad v_1 = v_1^0 + \varphi',\qquad v_2 = v_2^0 - \varphi'',\qquad \therefore \lim_{r=0}\varphi' = \lim_{r=0}\varphi'' = 0,$$

$$(106)\qquad \therefore K_h = -(\rho_2 - \rho_1)\int_h^a \cos(v_1^0 + v_2^0 - \psi + \varphi' - \varphi'')\sin(v_2^0 - v_1^0 - \varphi' - \varphi'')\frac{dr}{r}.$$

Pour que $K_{s_1 s_2}$ existe, il faut donç

$$(107)\qquad v_1^0 + v_2^0 - \psi = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n \text{ un nombre entier} \gtrless 0).$$

Si la condition (107) est satisfaite, $K_{s_1 s_2}$ existe si

$$(108) \qquad \int_0^a (\varphi' - \varphi'') \frac{dr}{r} \text{ est finie.}$$

Remarque. — En désignant l'axe des x de manière que

$$v_1^0 + v_2^0 = \pi,$$

l'égalité (107) peut s'écrire

$$(107^*) \qquad \psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \psi = \frac{3\pi}{2}$$

7. *La limite de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *au bord de la surface :* 1° *Ligne droite.* — Soit le centre P_0 situé sur le bord, supposé droit, qui sépare les deux domaines où les densités sont constantes et égales à ρ_1 et ρ_2 respectivement, et soit le point P situé sur la normale qui passe par P_0 et qui est dirigée vers l'intérieur du domaine où la densité est ρ_1. Posons $PP_0 = k$, et calculons la valeur de $K_{s_1 s_2}$ pour ce point. Nous trouverons

$$K_{s_1 s_2} = \quad (\rho_2 - \rho_1) \int_k^{\sqrt{a^2+k^2}} \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{\pi} \cos(2v - \psi')\, dv$$
$$+ (\rho_2 - \rho_1) \int_k^{\sqrt{a^2+k^2}} \frac{dr}{r} \int_{v_1}^{\pi} \cos(2v + \psi')\, dv + e_k,$$
$$\cos v_1 = -\frac{k}{r}, \qquad \lim_{k=0} e_k = 0, \qquad \psi' \equiv \psi_1' + \psi_2';$$

ψ_1 et ψ_2 étant les angles que font les éléments ds_1 et ds_2 avec la direction $P_0 P$ respectivement, la quantité e_k se rapporte à la partie restante du domaine (ρ_2),

$$(109) \qquad \therefore \overline{K}_{\rho_1} = \lim K_{s_1 s_2} = \frac{\pi}{2} (\rho_2 - \rho_1) \cos \psi'.$$

La quantité L étant égale à $-\pi\rho_1 c$ (22), nous aurons

$$(110) \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1} = \lim_{k=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\pi}{2} (\rho_2 - \rho_1) \cos(\psi_1' + \psi_3') - \pi\rho_1 \cos(\psi_2' - \psi_1').$$

De même, nous trouverons pour la limite de l'autre côté

$$(111) \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2} = -\frac{\pi}{2} (\rho_2 - \rho_1) \cos(\psi_1' + \psi_2') - \pi\rho_2 \cos(\psi_2' - \psi_1').$$

Remarque I. — La limite $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1}$ étant continue le long de la droite de séparation des densités ρ_1 et ρ_2, il suit que cette limite est indépendante de la direction dans laquelle le point P s'approche du bord. Par suite, on retrouvera les égalités (110) et (111), même dans le cas où la droite $P_0 P$ n'est pas normale au bord. Cela arrive même dans le cas où le point P s'approche du point P_0 suivant une courbe tangente au bord.

Remarque II. — Pour le point P_0, la quantité $K_{s_1 s_2}$ est égale à zéro, et nous avons trouvé (78)

$$(78^*)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right) = L = -\frac{\pi}{2}(\rho_2 - \rho_1)\cos(\psi_1 + \psi_2) - \pi\rho_1 \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ \qquad\qquad (\text{pour } 0 \leqq \psi_1 \leqq \pi). \end{array} \right.$$

En observant que $\psi'_1 = \psi_1 - \frac{\pi}{2}$ et $\psi'_2 = \psi_2 - \frac{\pi}{2}$, nous trouverons

$$(110^*)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_0,$$

l'élément ds_1 étant dirigé vers l'intérieur du domaine ρ_1. Un résultat analogue s'obtiendra pour $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_2}$, en observant que, dans la formule (78*), il faut échanger ρ_1 et ρ_2 pour $\pi \leqq \psi_1 \leqq 2\pi$.

2° *Le bord est curviligne.* — Supposons que le point P soit situé à l'intérieur du domaine où la densité est ρ_1 et qu'il s'approche indéfiniment du point P_0 du bord. Prenons P comme origine et la direction $P_0 P$ comme axe des coordonnées polaires (r, v). Posons $P_0 P = k$ et soit, pour $0 \leqq v \leqq \pi$, k' la valeur minimum de r, $\therefore k' \leqq k$. Nous supposerons que le bord jouit des deux propriétés suivantes :

$$(\alpha)\qquad \lim_{k=0} \frac{k'}{k} \neq 0;$$

si

$$(\beta)\qquad k' < r \leqq k,$$

le cercle décrit autour de P comme centre avec le rayon r ne rencontre ladite branche du bord qu'en deux points, Q_1 et Q_2, et, si r est plus grand que k, qu'en un seul point. Nous supposons que l'autre branche ($\pi \leqq v \leqq 2\pi$) jouit de propriétés analogues. Donc, la valeur de $K_{s_1 s_2}$ au point P s'obtient en ajoutant à la valeur trouvée dans l'alinéa 1° de ce paragraphe deux termes I et I' qui se rapportent aux deux branches du bord. Soient v_1 et v_2 les valeurs de v qui correspondent aux points Q_1 et Q_2; on aura

$$(112)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I} = {} & (\rho_2-\rho_1)\int_{k'}^{k}\frac{dr}{r}\int_{v_1}^{v_2}\cos(2v-\psi')\,dv \\ & +(\rho_2-\rho_1)\int_{k}^{a'}\frac{dr}{r}\int_{v_1}^{v_3}\cos(2v-\psi')\,dv+e'_k \equiv \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+e'_k, \\ & \lim_{k=0} a' = a, \qquad \lim_{k=0} e'_k = 0, \qquad \cos v_3 = -\frac{k}{r}, \qquad \psi' \equiv \psi'_1+\psi'_2, \end{aligned}\right.$$

où e'_k se rapporte à la partie restante du domaine ρ_2, a' est la valeur limite de r, et où ψ'_1 et ψ'_2 sont les angles que font les éléments ds_1 et ds_2 avec la direction P_0P. A cause de la supposition (α), nous trouverons

$$(113)\qquad \lim_{k=0} \mathrm{I}_1 = \text{ une quantité finie } = \mathrm{I}_1^0.$$

Pour l'étude de I_2, nous posons

$$(114)\quad \left\{\begin{aligned} & r = PQ', \qquad r' = P_0Q', \qquad \frac{\pi}{2}-\lambda = \text{l'angle }(P_0P,\ P_0Q'), \\ & \therefore\ r^2 = r'^2 - 2r'k\sin\lambda + k^2, \end{aligned}\right.$$

Q' étant un point quelconque du bord. Pour $r > k$, nous aurons

$$(115)\quad \left\{\begin{aligned} & \cos v_1 = \frac{r'\sin\lambda - k}{r}, \\ & \sin v_1 = \frac{r'}{r}\cos\lambda, \qquad r > k; \end{aligned}\right.$$

mais, pour $k' < r \leqq k$, nous avons deux valeurs r'_1 et r'_2 de r' pour chaque valeur de r à cause de la supposition (β), et nous aurons

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} & \cos v_1 = \frac{r'_1\sin\lambda_1 - k}{r}, \qquad \sin v_1 = \frac{r'_1}{r}\cos\lambda_1, \\ & \cos v_2 = \frac{r'_2\sin\lambda_2 - k}{r}, \qquad \sin v_2 = \frac{r'_2}{r}\cos\lambda_2. \end{aligned}\right.$$

λ_1 et λ_2 étant les valeurs de λ qui correspondent à r'_1 et r_2 respectivement. Posons

$$(117)\qquad \begin{cases} r = kt, \qquad r' = kt', \\ \therefore\ t_2 = t'^2 - 2t'\sin\lambda + 1, \end{cases}$$

$$(118)\qquad \begin{cases} \therefore\ I_2 = -(\rho_2 - \rho_1)\displaystyle\int_1^{\frac{a'}{k}} F\frac{dt}{t}, \\ F = \dfrac{1}{t}\sqrt{1 - \dfrac{1}{t^2}}\cos\psi' + \dfrac{t'}{t^2}\sin\lambda\sin\psi' + \dfrac{t'}{t^2}(t'\sin\lambda - 1)\cos(\lambda + \psi'). \end{cases}$$

Décrivons un cercle sur $P_0 P$ comme diamètre. Pour tous les points du bord qui tombent dans l'intérieur du cercle, nous trouverons (117)

$$(119)\qquad t' = \sin\lambda - \sqrt{t^2 - \cos^2\lambda},$$

et, pour tous les points du bord extérieurs au cercle, nous aurons

$$(120)\qquad t' = \sin\lambda + \sqrt{t^2 - \cos^2\lambda}.$$

Pour $t > 1$ il faut toujours employer la formule (120). Soit maintenant t'_0 une constante > 2, et posons

$$(121)\qquad \begin{cases} t_0 = \sqrt{t_0'^2 - 2t'_0\sin\lambda + 1}, \\ \therefore\ t_0 > 1. \end{cases}$$

Pour $t > t_0$ nous trouverons $t' > t'_0$ et inversement.

Nous écrivons, t_1 étant une constante $\geqq t_0$,

$$(122)\qquad I_2 = -(\rho_2 - \rho_1)\int_1^{t_1} F\frac{dt}{t} - (\rho_2 - \rho_1)\int_{t_1}^{\frac{a'}{k}} F\frac{dt}{t} \equiv \bar{I} + \bar{\bar{I}},$$

où $\lim\limits_{k=0}\bar{I}$ est finie. Pour de grandes valeurs de t nous pourrons écrire

$$(123)\qquad F = \sin\lambda\cos(\lambda + \psi') + \frac{1}{t}P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie}.$$

De plus, nous aurons

$$\frac{dt}{t} = \frac{(t' - \sin\lambda)\,dt' - t'\cos\lambda\,d\lambda}{t'^2 - 2t'\sin\lambda + 1} \equiv \frac{dt'}{t'}\left(1 + \frac{1}{t'}P_1\right) - \cos\lambda\left(1 + \frac{1}{t'}P_2\right)\frac{d\lambda}{t'},$$

où $\lim\limits_{t'=\infty} P_1$ et $\lim\limits_{t'=\infty} P_2$ sont finies. D'où il suit, si t'_1 est la valeur de t' qui correspond à la valeur t_1 de t,

$$(124)\quad \begin{cases} \bar{\bar{\mathrm{I}}} = -(\rho_3-\rho_1)\displaystyle\int_{t'_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt'}{t'} \\ \qquad + (\rho_2-\rho_1)\displaystyle\int_{r'=t'_1 k}^{r'=a} \sin\lambda\cos\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{k}{r'}\,d\lambda + e''_k, \\ \qquad\qquad \lim_{k=0} e''_k \text{ finie.} \end{cases}$$

Nous faisons sur le bord encore la troisième hypothèse

$$(\gamma)\qquad \int_{r'=0}^{r'=a'} (\lambda\, d\lambda) = \text{une quantité finie};$$

la seconde intégrale du deuxième membre de l'égalité (124) reste finie pour $\lim k = 0$.

Quant à l'autre branche, nous trouverons des formules analogues. Nous n'avons qu'à remplacer ψ' par $-\psi'$, et λ par l'angle correspondant λ'_1 dans les formules trouvées pour avoir celles qui ont lieu pour l'autre branche du bord. Ainsi nous obtiendrons le résultat

$$(125)\quad \begin{cases} \mathrm{K}_{s_1 s_2} = -(\rho_2-\rho_1)\displaystyle\int_k^a \cos(\lambda-\lambda'+\psi')\sin(\lambda+\lambda')\frac{dr'}{r'} + \bar{e}_k, \\ \qquad\qquad \lim_{k=0} \bar{e}_k \text{ finie.} \end{cases}$$

En comparant cette formule à la formule (97*), il faut observer que λ et λ' correspondent à v_3 et v_1 respectivement, et que

$$(126)\qquad \psi'_1 = \psi_1 - \frac{\pi}{2}, \qquad \psi'_2 = \psi_2 - \frac{\pi}{2}, \qquad \therefore\ \psi' = \psi - \pi,$$

$$(125^*)\quad \begin{cases} \therefore\ \mathrm{K}_{s_1 s_2} = (\rho_2-\rho_1)\displaystyle\int_k^a \cos(\lambda-\lambda'+\psi)\sin(\lambda+\lambda')\frac{dr'}{r'} + \bar{e}_k, \\ \qquad\qquad \lim_{k=0} \bar{e}_k \text{ finie.} \end{cases}$$

D'où le théorème :

Théorème. — *Si le point* P *s'approche indéfiniment du point* P_0 *du bord qui sépare deux parties du plan où les densités sont con-*

stantes, la limite vers laquelle tend la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *au point* P *est finie en même temps que la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *au point* P_0, *indépendamment de la direction de la droite* P_0P, *pourvu qu'au point* P_0 *le bord jouisse des propriétés* (α), (β) *et* (γ).

Remarque III. — Soit K_h^0 la valeur de K_h au point S_0; donc

$$(127)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{k=0\\h=0}}(K_{s_1s_2}-K_h^0) = \text{une quantité finie,} \\ \text{si} \\ \qquad\lim\limits_{\substack{k=0\\h=0}}\dfrac{h}{k}\ \text{est finie et} \neq 0. \end{cases}$$

Nous chercherons maintenant la valeur de la limite en question dans le cas où (δ) chacune des deux branches du bord a, au point P_0, une tangente bien déterminée.

Posons

$$(128)\qquad \lim_{r=0}\lambda=\lambda_0,\qquad \lim_{r=0}v_1=v_1^0,\qquad \lim_{r=0}v_2=v_2^0\qquad\text{et}\qquad \lim_{r=0}\lambda'=\lambda'_0,$$

$$(129)\qquad \begin{cases} \therefore \lim\limits_{k=0}\dfrac{k'}{k}=\cos\lambda_0, \\ v_1^0+v_2^0=2\pi-2\lambda_0, \\ \cos(v_1^0+\lambda_0)=\cos(v_2^0+\lambda_0)=-\dfrac{\cos\lambda_0}{t}; \end{cases}$$

$$(130)\qquad \therefore I_1^0 = 2(\rho_2-\rho_1)\cos(2\lambda_0+\psi')\cos\lambda_0\int_{\cos\lambda_0}^{1}\sqrt{1-\frac{\cos^2\lambda_0}{t^2}}\,\frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)(2\lambda_0-\sin 2\lambda_0)\cos(2\lambda_0+\psi'),\qquad \lambda_0 \gtrless 0.$$

L'intégrale I_2 peut s'écrire (118)

$$(131)\qquad I_2 = -(\rho_2-\rho_1)\int_1^{\frac{a'}{k}}\sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt}{t}$$

$$-(\rho_2-\rho_1)\int_1^{\frac{a'}{k}}[F-\sin\lambda\cos(\lambda+\psi')]\frac{dt}{t} = (\rho_2-\rho_1)\bar{I}_2+(\rho_2-\rho_1)\bar{\bar{I}}_2.$$

Écrivons t_1 étant plus grand que 1,

$$(132)\qquad \mathrm{I}_2 = -\int_1^{t_1} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt}{t} - \int_{t_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt}{t}.$$

La limite pour $k=0$ du premier terme du second membre de l'égalité (132) est

$$-\sin\lambda_0\cos(\lambda_0+\psi')\log t_1.$$

Le second terme du même membre peut s'écrire

$$-\int_{t'_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{t'-\sin\lambda}{t'^2-2t'\sin\lambda+1}dt' + \int_{r'=t'_1 k}^{r'=a} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t'^2}d\lambda + f_k,$$

$$\lim_{k=0} f_k = 0,$$

où le premier terme peut s'écrire

$$-\int_{t'_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\left(\frac{t'-\sin\lambda}{t'^2-2t'\sin\lambda+1} - \frac{1}{t'}\right)dt' - \int_{t'_1}^{\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dt'}{t'},$$

et la somme de ces deux termes peut s'écrire

$$\sin\lambda_0\cos(\lambda_0+\psi')\log t_1 - \int_k^a \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dr'}{r'} + f'_k, \qquad \lim_{k=0} f'_k = 0.$$

De plus, nous pourrons écrire

$$(133)\quad \int_{r'=t'_1 k}^{r'=a} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t'^2}d\lambda$$
$$= \int_{r'=t'_1 k}^{r'=wk} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t'^2}d\lambda + \int_{t'=w}^{t'=\frac{a}{k}} \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\frac{t'}{t'^2}d\lambda,$$

où w est une constante qui peut être supposée assez grande pour que la limite pour $k=0$ du dernier terme soit plus petite qu'une quantité donnée d'avance.

Dans le premier terme du second membre de l'égalité (33), la quantité $\dfrac{\sin\lambda\cos(\lambda+\psi')}{\lambda}\cos\lambda\dfrac{t'}{t'^2}$ est toujours numériquement plus petite qu'une quantité finie qui est indépendante de k. Mais les limites de l'intégration pour $d\lambda$ sont infiniment voisines l'une de l'autre ; par suite, d'après la propriété (γ) du bord, la limite pour $k=0$ de ce terme est égale à zéro,

$$(133^*) \qquad \therefore \lim_{k=0} \int_{r'=t'_1}^{r'=a} \sin\lambda \cos(\lambda+\psi')\cos\lambda\,\frac{t'}{t^2}\,d\lambda = 0.$$

Nous pourrons donc écrire

$$(132^*) \qquad \bar{\mathrm{I}}_2 = -\int_k^a \sin\lambda\cos(\lambda+\psi')\frac{dr'}{r'} + g_k, \qquad \lim_{k=0} g_k = 0.$$

Pour l'évaluation de $\lim\limits_{k=0} \overline{\overline{\mathrm{I}}}_2$ (131) nous n'avons qu'à poser $k=0$ dans l'intégrale $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_2$,

$$\begin{aligned}
\therefore\ \overline{\overline{\mathrm{I}}}{}_2^0 = \lim_{k=0} \overline{\overline{\mathrm{I}}}_2 &= -\cos\psi' \int_1^\infty \sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\,\frac{dt}{t^2} \\
&\quad + \cos\psi'\cos\lambda_0 \int_1^\infty \left[2\cos^2\lambda_0\sin\lambda_0 + (2\cos^2\lambda_0 - 1)\sqrt{t^2-\cos^2\lambda_0}\right]\frac{dt}{t^3} \\
&\quad - \sin\psi'\sin\lambda_0 \int_1^\infty \left(2\cos^2\lambda_0\sin\lambda_0 + \sin\lambda_0 + 2\cos^2\lambda_0\sqrt{t^2-\cos^2\lambda_0}\right)\frac{dt}{t^3} \\
&= -\frac{1}{4}(2\lambda_0 - \sin 2\lambda_0)\cos(2\lambda_0+\psi') + \frac{\pi}{4}[\cos(2\lambda_0+\psi') - \cos\psi'] \\
&\quad + \frac{1}{2}[\cos^2\lambda_0\sin(2\lambda_0+\psi') - \sin\psi'] \qquad \text{pour} \qquad \lambda_0 \geqq 0;
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
&= \quad \frac{1}{4}(2\lambda_0 - \sin 2\lambda_0)\cos(2\lambda_0+\psi') + \frac{\pi}{4}[\cos(2\lambda_0+\psi') - \cos\psi'] \\
&\quad + \frac{1}{2}[\cos^2\lambda_0\sin(2\lambda_0+\psi') - \sin\psi'] \qquad \text{pour} \qquad \lambda_0 < 0;
\end{aligned}$$

$$(134) \quad \begin{aligned} \mathrm{I}_1^0 + (\rho_2-\rho_1)\overline{\overline{\mathrm{I}}}{}_2^0 = \frac{1}{4}(\rho_2-\rho_1)\{&2\lambda_0\cos(2\lambda_0+\psi') + \sin(2\lambda_0+\psi') \\ &- \sin\psi' + \pi[\cos(2\lambda_0+\psi') - \cos\psi']\}. \end{aligned}$$

Nous trouverons un résultat analogue pour l'autre bord. Soient I'^0_1 et $\overline{\overline{\mathrm{I}}}{}'^0_2$ ce que deviendront I_1^0 et $\overline{\overline{\mathrm{I}}}{}_2^0$, lorsqu'on y remplace λ_0 et ψ' par λ'_0 et $-\psi'$; nous trouverons (132*)

$$(135) \qquad \mathrm{K}_{\rho_1} = \mathrm{K}^0_{s_1s_2} + \overline{\mathrm{K}}_{\rho_1} + \mathrm{I}_1^0 + \mathrm{I}'^0_1 + (\rho_2+\rho_1)(\overline{\overline{\mathrm{I}}}{}_2^0 + \overline{\overline{\mathrm{I}}}{}'^0_2),$$

où K_{ρ_1}, $\mathrm{K}^0_{s_1s_2}$ et $\overline{\mathrm{K}}_{\rho_1}$ représentent respectivement les quantités $\lim\limits_{k=0} \mathrm{K}_{s_1s_2}$, la valeur de $K_{s_1 s_2}$ au point P_0 et $\lim_{k=0} K_{s_1 s_2}$ pour le cas où le bord est rectiligne et perpendiculaire à la droite $P_0 P$. La valeur de $\overline{K}_{\rho_1}$ étant donnée par l'égalité (107), nous trouverons le résultat suivant :

$$(136)\quad \begin{cases} K_{\rho_1} = K^0_{s_1 s_2} + \frac{1}{4}(\rho_2 - \rho_1) M + \frac{\pi}{4}(\rho_2 - \rho_1)[\cos(2\lambda_0 + \psi') + \cos(2\lambda'_0 - \psi')], \\ M = 2\lambda_0 \cos(2\lambda_0 + \psi') + \sin(2\lambda_0 + \psi') + 2\lambda'_0 \cos(2\lambda'_0 - \psi') + \sin(2\lambda'_0 - \psi'). \end{cases}$$

Cas particulier. — Si $P_0 P$ est la bissectrice de l'angle que font, au point P_0, les tangentes des deux branches, et si nous posons dans ce cas

$$(137)\quad K'_{\rho_1} \equiv K_{\rho_1}, \quad \mu \equiv \lambda_0 = \lambda'_0, \quad \varphi_1 \equiv \psi'_1, \quad \varphi_2 \equiv \psi'_2 \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \varphi_1 + \varphi_2,$$

nous trouverons

$$(138)\quad K'_{\rho_1} = K^0_{s_1 s_2} + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)[(\pi + 2\mu)\cos 2\mu + \sin 2\mu]\cos\varphi.$$

Cas général. — Si la droite $P_0 P$ fait l'angle α avec la bissectrice, nous trouverons

$$(139)\quad \begin{cases} \lambda = \mu + \alpha, \quad \lambda' = \mu - \alpha, \quad \psi' = \varphi - 2\alpha, \\ \therefore\ K_{\rho_1} = K'_{\rho_1} - (\rho_2 - \rho_1)\alpha \sin 2\mu \sin\varphi. \end{cases}$$

En nommant $\frac{\partial^2 V'}{\partial s_1 \partial s_2}$ la dérivée prise en un point de la bissectrice, nous trouverons

$$(140)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1} \equiv \lim_{k=0} \frac{\partial^2 V'}{\partial s_1 \partial s_2} = K'_{\rho_1} - \pi\rho_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \lim_{k=0}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial s_1 \partial s_2}\right) = -(\rho_2 - \rho_1)\alpha \sin 2\mu \sin\varphi. \end{cases}$$

D'où le théorème :

THÉORÈME. — *Si le bord commun de deux parties du plan dont les densités sont constantes jouit, au point P_0, des propriétés (β) et (γ), et si chacune des deux branches du bord y admet une tangente unique et bien déterminée; si, de plus, le point P s'approche indéfiniment du point P_0 suivant une droite qui ne touche pas le bord, la limite de la différence $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial s_1 \partial s_2}$ est toujours finie,* *les dérivées secondes du potentiel logarithmique étant prises respectivement pour le point* P *et pour un autre point* P′ *qui se meut suivant la bissectrice des tangentes des deux branches de manière que toujours* $P_0P' = P_0P$. *Cette limite est proportionnelle à l'angle* α *que fait* P_0P *avec* P_0P', *et sa valeur est donnée par l'égalité* (140).

Remarque IV. — Pour un point régulier $\mu = 0$,

$$\therefore \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}\right)_{\rho_1} = \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial s_1\,\partial s_2}\right)_{\rho_1}.$$

D'où il suit qu'en un point régulier la limite $\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}\right)_{\rho_1}$, si elle existe, a une certaine valeur unique indépendamment de la direction de la droite P_0P. Cela arrivera aussi dans le cas où $\sin\varphi = 0$.

Remarque V. — La condition (α) $\lim\limits_{k=0}\dfrac{k'}{k} \neq 0$ n'est pas indispensable, de manière que la dérivée existe dans certains cas où P_0P touche le bord au point P_0. En effet, nous aurons (112)

$$I_1 = (\rho_2 - \rho_1)\int_{k'}^{k}\frac{dr}{r}\int_{v_1}^{v_2}\cos(2v - \psi')\,dv.$$

Posons

$$(141)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{k}{k'} = \beta,\\ &J_1 \equiv \frac{1}{2}\int_{\beta}^{1-\varkappa}[\sin(2v_2 - \psi') - \sin(2v_1 - \psi')]\frac{dt}{t},\\ &J_2 \equiv \frac{1}{2}\int_{1-\varkappa}^{\beta}[\sin(2v_2 - \psi') - \sin(2v_1 - \psi')]\frac{dt}{t},\\ &\therefore I_1 = (\rho_2 - \rho_1)(J_1 + J_2), \end{aligned}\right.$$

$\varkappa$ étant une constante positive < 1. De plus, nous aurons

$$(142)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos(v_1 + \lambda_1) = -\frac{k}{r}\cos\lambda_1, &&\cos(v_2 + \lambda_2) = -\frac{k}{r}\cos\lambda_2,\\ &\sin(v_1 + \lambda_1) = \sqrt{1 - \frac{k^2\cos^2\lambda_1}{r^2}}, &&\sin(v_2 + \lambda_2) = -\sqrt{1 - \frac{k^2\cos^2\lambda_2}{r^2}}, \end{aligned}\right.$$

λ_1 et λ_2 étant les valeurs de λ qui correspondent aux deux points (r, v_1)

et (r, v_2) du bord. $\lim\limits_{k=0} J_2$ étant évidemment finie, il nous faut seulement étudier $\lim\limits_{k=0} J_1$. En éliminant v_1 et v_2 au moyen des formules (142), nous trouverons

$$(143)\qquad \begin{cases} J_1 = A_1 \displaystyle\int_\beta^{1-\varkappa} \cos\lambda_1 \frac{dt}{t^2} + A_2 \int_\beta^{1-\varkappa} \cos\lambda_2 \frac{dt}{t^2}, \\ \lim\limits_{k=0} A_1 \text{ finie}, \qquad \lim\limits_{k=0} A_2 \text{ finie}, \end{cases}$$

ou

$$(143^*)\qquad J_1 = A_1 \int_{\frac{\beta}{1-\varkappa}}^{1} \frac{\cos\lambda_1}{\beta}\, d\tau + A_2 \int_{\frac{\beta}{1-\varkappa}}^{1} \frac{\cos\lambda_2}{\beta}\, d\tau \qquad \text{pour} \qquad t = \frac{\beta}{\tau},$$

$$\therefore \lim_{k=0} J_1 \quad \text{est finie, si} \quad \lim_{k=0} \frac{\cos\lambda_1}{\beta} \quad \text{et} \quad \lim_{k=0} \frac{\cos\lambda_2}{\beta} \quad \text{sont finies.}$$

Posons

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} - w_1, \qquad \lambda_2 = \frac{\pi}{2} - w_2,$$

et soient w_0 et r'_0 les valeurs de w et r qui correspondent au point du bord pour lequel $r = k'$;

$$\sin w_0 \leqq \beta \frac{k}{r'_0}, \qquad \lim_{k=0} \frac{k}{r'_0} = 1,$$

$$(144)\qquad \therefore \lim_{k=0} J_1 \quad \text{existe, si} \quad \lim_{k=0} \frac{w}{w_0} \quad \text{est finie,}$$

pour toutes les valeurs de w pour lesquelles $k \leqq r \leqq k(1-\varkappa)$.

Dans le cas particulier où l'on peut regarder la partie P_0Q_1 de la branche du bord approximativement comme un cercle de rayon R, Q_1 étant le point (k, v_1) du bord, et en posant $\varkappa = 0$, on trouvera que la plus grande valeur de $\cos\lambda$ se rapporte au point Q_1 pour lequel on a

$$\cos\lambda = \frac{k}{R + k'}.$$

De plus, on aura avec l'approximation supposée

$$k'(2R + k') = k^2,$$

$$(144^*)\qquad \therefore \left(\frac{\cos\lambda}{\beta}\right)_{\max.} = 2 - \frac{k'}{R + k'} < 2.$$

et

$$\therefore \lim_{k=0}\left(\frac{\cos\lambda}{\beta}\right)_{\max.} \quad \text{est finie même dans le cas où} \quad \lim_{k=0} R \quad \text{est nulle ou infinie.}$$

8. *Changement brusque de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ au bord de la surface.* — Si le point P traverse, au point P_0, le bord qui sépare les deux parties du plan où les densités sont égales aux constantes ρ_1 et ρ_2 respectivement, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ éprouve, en général, un changement brusque dont nous chercherons la valeur dans le cas où le point P suit une droite PP_0P_1. Nous avons trouvé la valeur $\frac{\partial^2 V_\rho}{\partial s_1 \partial s_2}$ de cette dérivée au point P_0 (§ 6), l'élément ds_1 étant dirigé vers l'intérieur du domaine (ρ_1), et la valeur limite $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1}$ du côté de la densité ρ_1 (§ 6).

Afin de trouver la valeur limite $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2}$ de l'autre côté il nous faut remplacer dans la formule (140)

$$(145)\qquad \begin{cases} \rho_1, \quad \rho_2, \quad \mu, \quad \alpha \quad \text{et} \quad \varphi, \\ \text{par} \\ \rho_2, \quad \rho_1, \quad -\mu, \quad -\alpha \quad \text{et} \quad 2\pi-\varphi, \end{cases}$$

l'angle φ_1 étant remplacé par $\pi - \varphi_1$ et π_2 par $\pi - \varphi_2$.

Nous obtiendrons ainsi les valeurs suivantes :

$$(146)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1} = K^0_{s_1 s_2} + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)\left[(\pi + 2\mu)\cos 2\mu + \sin 2\mu\right]\cos\varphi \\ \qquad\qquad - \pi\rho_1 c - (\rho_2 - \rho_1)\alpha \sin 2\mu \sin\varphi, \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2} = K^0_{s_1 s_2} - \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)\left[(\pi - 2\mu)\cos 2\mu - \sin 2\mu\right]\cos\varphi \\ \qquad\qquad - \pi\rho_2 c - (\rho_2 - \rho_1)\alpha \sin 2\mu \sin\varphi, \\ K^0_{s_1 s_2} = -\lim_{h=0}(\rho_2 - \rho_1)\int_h^a \cos(v_1 - v_3 - \varphi)\sin(v_1 + v_3)\frac{dr}{r} \quad \text{pour } \psi = \varphi + \pi; \end{cases}$$

$$(147)\qquad \therefore \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2} = \pi(\rho_2 - \rho_1)(\cos 2\mu \cos\varphi + c).$$

Pour la dérivée au point P_0 nous trouverons la valeur suivante, en posant dans l'égalité (100*)

$$(148)\quad \left\{\begin{aligned}
&c_1^0 = \mu, \quad c_2^0 = \pi - \mu, \quad \psi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_2, \quad \therefore \psi = \pi + \varphi,\\
&\frac{\partial^2 V_{\rho_1}}{\partial s_1\, \partial s_2} = K^0_{s_1 s_2} - \pi\rho_1 c + (\rho_2 - \rho_1)\left[\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)\cos 2\mu \cos\varphi\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \varphi_1 \sin 2\mu \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\mu \cos\varphi\right],\\
&\frac{\partial^2 V_{\rho_2}}{\partial s_1\, \partial s_2} = K^0_{s_1 s_2} - \pi\rho_2 c - (\rho_2 - \rho_1)\left[\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right)\cos 2\mu \cos\varphi\right.\\
&\qquad\qquad \left. - (\pi - \varphi_1)\sin 2\mu \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\mu \cos\varphi\right],
\end{aligned}\right.$$

selon que l'élément ds_1 est dirigé vers l'intérieur du domaine (ρ_1) ou du domaine (ρ_2).

Si l'élément ds'_1 est dirigé en sens opposé à ds_1, il faut changer

$$(149)\quad K^0_{s_1 s_2},\ \rho_1,\ \rho_2,\ \mu \ \text{ et } \ \varphi_2 \quad \text{en} \quad -K_{s_1 s_2},\ \rho_2,\ \rho_1,\ -\mu \ \text{ et } \ \varphi_2 + \pi \quad \text{resp.},$$

$$(150)\quad \begin{aligned}\therefore \frac{\partial^2 V_{\rho_2}}{\partial s_1\, \partial s_2} = {}& - K^0_{s_1 s_2} + \pi\rho_2 c + (\rho_2 - \rho_1)\\
&\times\left[\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right)\cos 2\mu \cos\varphi + \varphi_1 \sin 2\mu \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\mu \cos\varphi\right],\end{aligned}$$

$$(151)\quad \left\{\begin{aligned}
&\therefore \frac{\partial^2 V_{\rho_1}}{\partial s_1\, \partial s_2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} = (\rho_2 - \rho_1)\left[(\varphi_1 - \alpha)\sin\varphi + \cos\varphi\right]\sin 2\mu,\\
&\frac{\partial^2 V_{\rho_1}}{\partial s_1\, \partial s_2} + \frac{\partial^2 V_{\rho_2}}{\partial s'_1\, \partial s_2} = \pi(\rho_2 - \rho_1)(\cos 2\mu \cos\varphi + c),\\
&\frac{\partial^2 V_{\rho_1}}{\partial s_1\, \partial s_2} + \frac{\partial^2 V_{\rho_2}}{\partial s'_1\, \partial s_2} = -\pi(\rho_2 - \rho_1)\sin 2\mu \sin\varphi.
\end{aligned}\right.$$

Enfin, nous trouverons pour la fonction ΔV (§ 5)

$$(152)\quad \left\{\begin{aligned}
(\Delta V)_{\rho_1} &= -\pi\rho_1(c + c'),\\
(\Delta V)_{\rho_2} &= -\pi\rho_2(c + c'),
\end{aligned}\right.$$

$(\Delta V)_{\rho_1}$ et $(\Delta V)_{\rho_2}$ étant les valeurs limites de ΔV des deux côtés du bord;

$$(153)\quad \therefore (\Delta V)_{\rho_1} - (\Delta V)_{\rho_2} = \pi(\rho_2 - \rho_1)(c + c').$$

De plus, nous trouverons (45)

$$(154)\quad \begin{cases} (\Delta V)_{\rho_1} - \Delta V_{11} = -\frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\psi' - \psi_1)[\cos(2\lambda + \psi) - \cos(2\lambda' - \psi)], \\ (\Delta V)_{\rho_1} - \Delta V_{12} = \pi(\rho_2 - \rho_1)c' - \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\psi' - \psi_1) \\ \qquad \times [\cos(2\lambda + \psi) - \cos(2\lambda' - \psi)] \\ \qquad + \pi(\rho_2 - \rho_1)\cos(2\lambda + \psi) \quad \text{pour} \quad \psi' > \pi - \lambda. \\ (\Delta V)_{\rho_1} - \Delta V_{12} = \pi(\rho_2 - \rho_1)c' - \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)(\psi_1 - \psi') \\ \qquad \times [\cos(2\lambda + \psi) - \cos(2\lambda' - \psi)] \\ \qquad + \pi(\rho_2 - \rho_1)\cos(2\lambda' - \psi) \quad \text{pour} \quad 0 < \psi' < \lambda'. \end{cases}$$

En renversant la direction de ds_1 et ds', il faut augmenter ψ_1 et ψ' de π. Donc nous trouverons

$$(155)\qquad \Delta V_{11} + \Delta V_{22} = \pi(\rho_2 - \rho_1)(c + c').$$

Remarque. — Les premiers membres des égalités (147) et (151) peuvent être remplacés par des expressions analogues aux premiers membres de la seconde des égalités (140). Sous cette forme ces égalités ont lieu même dans le cas où $K^0_{s_1 s_2}$ n'existe pas, c'est-à-dire où ces dérivées ou limites n'existent pas elles-mêmes.

CHAPITRE II.

LA DÉRIVÉE PREMIÈRE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE D'UNE LIGNE PLANE.

9. *Existence de la dérivée.* — Soit μ_0 une masse finie répandue d'une manière quelconque dans le plan, et soit

$$(156)\qquad V = \int_0^{\mu_0} \log\frac{1}{R}\,d\mu$$

le potentiel logarithmique de cette masse au point P, R étant la distance PQ de P jusqu'au point Q où se trouve l'élément de masse. Soit de plus

$$V_0 = \int_0^{\mu_0} \log\frac{1}{r}\,d\mu \tag{157}$$

le potentiel logarithmique de la masse considérée pour un point fixe P_0, $r = P_0Q$. Posons

$$\left\{\begin{aligned} P_0P &= h,\\ r &= ht,\\ R &= hq,\\ \cos(h, r) &= u; \end{aligned}\right. \tag{158}$$

$$\left\{\begin{aligned} \therefore R &= \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2},\\ q &= \sqrt{t^2 - 2tu + 1},\\ V - V_0 &= \int_0^{\mu_0} \log\frac{t}{q}\,d\mu. \end{aligned}\right. \tag{159}$$

Nous supposerons que la masse μ_0 est répandue de telle manière qu'à tout point P le potentiel logarithmique soit fini. D'où il suit que l'intégrale de (159) est finie, quoique la quantité $\log\frac{t}{q}$ devienne infinie pour $t = 0$ et pour $t = u = 1$. De plus, nous supposons que nous pourrons prendre les éléments $d\mu$ dans un ordre tel que nous commencions à prendre tous les éléments des points Q' pour lesquels P_0Q' est plus grand qu'une quantité r; puis successivement la somme $\delta\mu$ des éléments pour lesquels $r \leqq P_0Q' < r + \delta r$, de manière que nous pourrons écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{P_0Q' = r}^{P_0Q' = r + \delta r} d\mu = \delta\mu,\\ &\int_{P_0Q' = 0}^{P_0Q' = r} d\mu = \mu(r), \end{aligned}\right. \tag{160}$$

et, par suite,

$$V - V_0 = \int_0^{\mu(wh)} \log\frac{t}{q}\,d\mu + \int_{\mu(wh)}^{\mu_0} \log\frac{t}{q}\,d\mu, \tag{161}$$

w étant une constante > 1 et $\mu(wh)$ la valeur de $\mu(r)$ pour $t = w$.

En développant $\log \frac{t}{q}$ pour $t > 1$, nous trouverons

$$\log \frac{t}{q} = \frac{1}{t} \mathrm{P}, \qquad \lim_{t=\infty} \mathrm{P} \text{ finie};$$

donc nous pourrons choisir la constante w assez grande pour que le second terme du second membre de l'égalité (161) soit plus petit qu'une quantité donnée d'avance, quelque petite qu'elle soit, quelle que soit la valeur de h. De plus, $\lim\limits_{h=0} \mu(wh) = 0$; par suite, la quantité h peut être choisie assez petite pour que le premier terme du second membre devienne aussi petit qu'on voudra. D'où le théorème :

Théorème. — *Si le potentiel logarithmique d'une masse finie quelconque est fini au point* P_0 *et en tous les points du voisinage de* P_0, *ce potentiel est continu au point* P_0 *dans toutes les directions.*

Posons dans (160) dr au lieu de δr, et soit

$$\text{(162)} \qquad \left\{ \begin{aligned} d\mu &= \sigma(r, u)\, dr, \\ \therefore\ \delta\mu &= dr \sum_u \sigma(r, u). \end{aligned} \right.$$

Nous supposerons, dans la suite, que la quantité

$$\sum_u |\sigma(r, u)|$$

reste toujours plus petite qu'une constante finie. Si a est la valeur maximum de r, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\mathrm{V} - \mathrm{V}_0) &= \frac{1}{h} \int_0^a \sum \sigma \log \frac{r}{\mathrm{R}}\, dr \\ &= \int_0^{\frac{a}{h}} \sum \sigma(ht, u) \log \frac{t}{q}\, dt \\ &= \int_0^{w} \sum \sigma \log \frac{t}{q}\, dt + \int_w^{\frac{a}{h}} \sum \sigma \log \frac{t}{q}\, dt \equiv \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2, \end{aligned}$$

w étant une constante telle que $1 < w < \frac{a}{h}$. Or,

$$\int_0^w \sum \sigma \log t \, dt = \left(\sum \sigma\right)_m w(\log w - 1),$$

où m désigne une valeur moyenne. De plus, nous pourrons écrire

$$q = \sqrt{(1-t)^2 + 2t(1-u)}, \qquad \therefore q \geqq (1-t),$$

$$\therefore \left| \int_0^w \sum \sigma \log \frac{1}{q} \, dt \right| \leqq G \int_0^1 \log \frac{1}{1-t} \, dt + G \int_1^w \left| \log \frac{1}{t-1} \right| dt$$
$$= G\left(1 + \overline{w-1} \left| \log \overline{w-1} - 1 \right| \right);$$

G étant une quantité finie $\geqq \sum |\sigma|$, $\therefore$ I_1 reste plus petite qu'une constante finie pour chaque valeur de h, c'est-à-dire que

$$\lim_{h=0} I_1 \text{ est finie.}$$

Pour $t > 1$, on peut écrire

$$\log \frac{t}{q} = \frac{u}{t} + \frac{1}{t^2} P_1, \qquad \lim_{t=\infty} P_1 \text{ finie},$$

$$\therefore I_2 = \int_w^{\frac{a}{h}} \sum \sigma u \frac{dt}{t} + \int_w^{\frac{a}{h}} \sum \sigma P_1 \frac{dt}{t^2}$$
$$= \int_h^a \sum \sigma u \frac{dr}{r} - \int_1^w \sum \sigma u \frac{dt}{t} + \left(\sum \sigma P_1\right)_m \left(\frac{1}{w} - \frac{h}{a}\right),$$

où les deux derniers termes ont des limites finies pour $\lim h = 0$, l'indice m désignant une valeur moyenne. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soit μ_0 une masse finie répandue de manière qu'on puisse écrire*

$$(163) \qquad d\mu = dr \sum_u \sigma(r, u), \qquad u = \cos(r, ds),$$

où $d\mu$ est l'élément de masse en un certain point Q, r la distance P_0Q de Q à un point fixe P_0, ds un élément de ligne émanant du *point* P_0, *et* $\sum_u |\sigma|$ *une quantité qui reste plus petite qu'une constante finie quelle que soit la valeur de r. La condition nécessaire et suffisante pour que le potentiel logarithmique de cette masse ait, au point* P_0, *une dérivée finie dans la direction ds, est que la quantité*

$$W_s \equiv \lim_{h=0} \int_h^a \sum \sigma u \frac{dr}{r} \textit{ soit finie.} \tag{164}$$

Nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial s} &= W + Q,\\
W_s &= \lim_{h=0} W_s^{(h)},\\
Q &= \lim_{h=0} Q_h,\\
W_s^{h} &= \int_h^a \sum \sigma u \frac{dr}{r} = \int_{(h)}^{\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{1}{r}\, d\mu,\\
Q_h &= \int_0^1 \sum \sigma \log \frac{t}{q}\, dt + \int_1^{\frac{a}{h}} \sum \sigma \left(\log \frac{t}{q} - \frac{u}{t}\right) dt,\\
q &= \sqrt{t^2 - 2tu + 1}.
\end{aligned}\right. \tag{165}$$

Si les quantités

$$\left\{\begin{aligned}
&\lim_{r=0} \sigma(r, u) = \sigma_0\\
&\text{et}\\
&\lim_{r=0} u \equiv u_0
\end{aligned}\right. \tag{166}$$

sont déterminées, nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned}
&Q = \sum \sigma_0 L,\\
&L = u_0 - \sqrt{1 - u_0^2}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{tang}^{-1} \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}}\right) = \cos\delta_0 - (\pi - \delta_0)\sin\delta_0.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \delta_0 = 0,\\
&\delta_0 = \lim_{r=0} \delta,\\
&\delta = \text{l'angle } (r, ds). \qquad \therefore u = \cos\delta, \qquad u_0 = \cos\delta_0.
\end{aligned}\right. \tag{167}$$

COROLLAIRE. — *Si* W *existe, nous trouverons*

(168) $$\sum \sigma_0 u_0 = 0.$$

Remarque. — Nous supposerons dans la suite que la masse est répartie sur une courbe qui passe par le point P_0 et y a deux branches à tangentes déterminées. Nous aurons dans ce cas

(169) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= \int_0^a (\sigma' \cos\delta' + \sigma'' \cos\delta'')\frac{dr}{r} \\ &\quad + \sigma'_0 \cos\delta'_0 + \sigma''_0 \cos\delta''_0 - \sigma'_0(\pi - \delta'_0)\sin\delta'_0 - \sigma''(\pi - \delta''_0)\sin\delta''_0, \\ &\qquad \delta'_0 \gtreqless 0, \qquad \delta''_0 \lesseqgtr 0, \end{aligned}\right.$$

où σ' et σ'', u' et u'', δ' et δ'' se rapportent aux deux branches respectives.

Cas particulier. — Si, au point P_0, la courbe a une tangente unique, on aura

(170) $$\left\{\begin{aligned} &\delta'_0 + \delta''_0 = \pi, \qquad \therefore\ u'_0 + u''_0 = 0. \\ &\therefore\ \frac{\partial V}{\partial s} = \int_0^a (\sigma' u' + \sigma'' u'')\frac{dr}{r} \\ &\quad + (\sigma_0 - \sigma''_0)u'_0 - \pi\sigma'_0 \sin\delta'_0 + (\sigma'_0 - \sigma''_0)\delta'_0 \sin\delta'_0, \end{aligned}\right.$$

et, si $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ existe,

(171) $$(\sigma'_0 - \sigma''_0)u'_0 = 0.$$

Pour la dérivée normale, nous trouverons

(172) $$\frac{\partial V}{\partial n} = \int_0^a (\sigma' \sin\lambda' + \sigma'' \sin\lambda'')\frac{dr}{r} - \frac{\pi}{2}(\sigma'_0 + \sigma''_0),$$

où nous avons posé

(173) $$\lambda' = \frac{\pi}{2} - \delta', \qquad \lambda'' = \frac{\pi}{2} - \delta''.$$

10. *La limite,* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$, *de la dérivée extérieure.* — Soit P un point extérieur aux masses, et posons $P_0P = h$. Soient de plus V_h le potentiel logarithmique des masses au point P, et ds un élément émanant du point P dans une direction quelconque;

$$(174) \qquad \frac{\partial V_h}{\partial s} = \int_0^{\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{1}{R}\, d\mu = \int_0^{\mu_0} v \frac{d\mu}{R}, \qquad v = \cos(R, ds),$$

R étant la distance PQ. Soient de plus

$$(175) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = P_0Q, \qquad \varphi = \text{l'angle}\,(h, r), \qquad \omega = \text{l'angle}\,(h, ds) > 0, \\ \text{si } ds \text{ se trouve du même côté de } P_0P \text{ que } r, \text{ et } < 0 \text{ dans le} \\ \qquad\qquad \text{cas contraire, et } u = \cos\varphi, \\ \qquad\qquad \therefore R = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}, \\ \qquad v = \dfrac{ru - h}{R}\cos\omega + \dfrac{r\sin\varphi}{R}\sin\omega; \end{array} \right.$$

$$(176) \quad \left\{ \begin{array}{l} \therefore \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \cos\omega \dfrac{\partial V_h}{\partial s_1} + \sin\omega \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2}, \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_1} = \displaystyle\int_0^{\mu_0} \frac{ru - h}{R^2}\, d\mu, \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2} = \displaystyle\int_0^{\mu_0} \sin\varphi \frac{r\, du}{R^2}, \end{array} \right.$$

l'élément ds_1 étant pris dans la direction de P_0P_1 et ds_2 dans la direction normale à P_0P. Posons

$$(177) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = ht, \\ R = hq, \\ \therefore q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \end{array} \right.$$

et supposons

$$(178) \qquad d\mu = \sigma\, dr, \qquad \sigma \text{ finie},$$

$$(179) \quad \left\{ \begin{array}{l} \therefore \dfrac{\partial V_h}{\partial s_1} = \displaystyle\sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma \frac{tu - 1}{q^2}\, dt \\ \qquad = \displaystyle\sum \int_0^1 \sigma \frac{tu - 1}{q^2}\, dt + \sum \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma \left(\frac{tu - 1}{q^2} - \frac{u}{t} \right) dt + \sum \int_h^a \sigma u \frac{dr}{r}, \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2} = \displaystyle\sum \int_0^1 \sigma \sin\varphi \frac{t\, dt}{q^2} + \sum \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma \sin\varphi \left(\frac{t}{q^2} - \frac{1}{t} \right) dt \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum \int_h^a \sigma \sin\varphi \frac{dr}{r}. \end{array} \right.$$

Nous distinguerons deux cas :

Cas I. —

$$\lim_{h=0} \varphi \neq 0,$$
$$\therefore q \neq 0 ;$$

par suite, nous pourrons passer à la limite immédiatement, et nous trouverons (179)

$$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s_1} = W_1 + Q_1,$$

$$(180)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s_2} = W_2 + Q_2,\\
&W_1 \equiv \lim_{h=0} \int_h^a \sum \sigma \cos\varphi \frac{dr}{r},\\
&W_2 \equiv \lim_{h=0} \int_h^a \sum \sigma \sin\varphi \frac{dr}{r},\\
&Q_1 = \sum \sigma_0 L_1,\\
&Q_2 = \sum \sigma_0 L_2,\\
&L_1 = -(\pi - \varphi_0) \sin\varphi_0, \qquad \varphi_0 > 0,\\
&L_2 = (\pi - \varphi_0) \cos\varphi_0,\\
&\sigma_0 = \lim_{r=0} \sigma, \qquad \varphi_0 \equiv \lim_{r=0} \varphi ;
\end{aligned}\right.$$

$$(181)\quad \left\{\begin{aligned}
&\therefore \lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s} = W_s + Q',\\
&W_s \equiv \lim_{h=0} W_s^{(h)},\\
&W_s^{h} = \int_h^a \sum \sigma \cos\varepsilon \frac{dr}{r} = \int_{\mu(h)}^{\mu_0} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{ds} d\mu,\\
&Q' = \sum \sigma_0 L',\\
&L' = (\pi - \varphi_0) \sin\varepsilon_0,\\
&\varepsilon = \text{l'angle}(ds, r) = \varphi - \omega, \qquad \varepsilon_0 \equiv \lim_{r=0} \varepsilon.
\end{aligned}\right.$$

Si la masse est répandue sur une courbe qui, au point P_0, ait deux branches à tangentes déterminées, nous trouverons (181)

$$(182)\quad \begin{cases} W_s^{(h)} = \displaystyle\int_h^a (\sigma' \cos\varepsilon' + \sigma'' \cos\varepsilon'') \frac{dr}{r}, \\ Q' \quad = -\sigma'_0(\pi - \varphi'_0) \sin\varepsilon'_0 - \sigma''_0(\pi - \varphi''_0) \sin\varepsilon''_0, \qquad \varphi'_0 > 0, \qquad \varphi''_0 > 0. \end{cases}$$

COROLLAIRES. — 1° *Si* W_s *existe*,

$$(183)\qquad \sigma'_0 \cos\varepsilon'_0 + \sigma''_0 \cos\varepsilon''_0 = 0.$$

2° *Changement brusque de la dérivée.* — Si le point P traverse la courbe en suivant une droite, la dérivée éprouve, en général, un changement brusque. La valeur limite de l'autre côté s'obtient des formules précédentes en y changeant φ, ω et ε en $\pi - \varphi$, $\pi - \omega$ et $-\varepsilon$ respectivement. En désignant les limites de $\frac{\partial V_h}{\partial s}$ des deux côtés par $\frac{\partial V_+}{\partial s}$ et $\frac{\partial V_-}{\partial s}$ et la valeur de la dérivée au point P_0 par $\frac{\partial V_0}{\partial s}$, nous trouverons (167), (182)

$$(184)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = W_s + \sigma'_0 \cos\delta'_0 + \sigma''_0 \cos\delta''_0 - \sigma'_0(\pi - \delta'_0) \sin\delta'_0 - \sigma''_0(\pi - \delta''_0) \sin\delta''_0, \\ \qquad\qquad \delta'_0 > 0, \qquad \delta''_0 > 0, \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} = W_s - \sigma'_0(\pi - \varphi'_0) \sin\varepsilon'_0 - \sigma''_0(\pi - \varphi''_0) \sin\varepsilon''_0, \\ \dfrac{\partial V_-}{\partial s} = W_s + \sigma'_0 \varphi'_0 \sin\varepsilon'_0 + \sigma''_0 \varphi''_0 \sin\varepsilon''_0, \qquad \varphi'_0 > 0, \qquad \varphi''_0 > 0, \end{cases}$$

où

$$\varepsilon'_0 = \delta'_0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon''_0 = \delta''_0,$$

si $\varphi > \omega$, c'est-à-dire si l'élément ds est dirigé vers le côté positif de la courbe, et

$$\varepsilon'_0 = -\delta'_0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon''_0 = -\delta''_0,$$

si $\varphi < \omega$, c'est-à-dire si l'élément ds est dirigé vers le côté négatif de la courbe.

Si l'élément ds' est dirigé en sens opposé à ds, il faut changer W_s, δ'_0 et δ''_0 en $-W_s$, $\pi - \delta'_0$ et $\pi - \delta''_0$:

$$(185)\qquad \therefore \frac{\partial V}{\partial s'} = -W_s - \sigma'_0 \cos\delta'_0 - \sigma''_0 \cos\delta''_0 - \sigma'_0 \delta'_0 \sin\delta'_0 - \sigma''_0 \delta''_0 \sin\delta''_0.$$

Des égalités (184) et (185) nous tirons

$$(186)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_0}{\partial s} - \dfrac{\partial V_0}{\partial s'} = -\pi\Gamma, \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} - \dfrac{\partial V_-}{\partial s} = -\pi\Gamma, \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} - \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = \omega\Gamma - \Gamma', \qquad \text{si} \quad \varphi > \omega, \\ \text{mais} \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} - \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = (2\pi - \omega)\Gamma - \Gamma', \qquad \text{si} \quad \varphi_0 < \omega, \\ \Gamma = \sigma_0' \sin\delta_0' + \sigma_0'' \sin\delta_0'', \qquad \Gamma' = \sigma_0' \cos\delta_0' + \sigma_0'' \cos\delta_0''. \end{cases}$$

Remarque. — Si W_s existe, nous avons trouvé

$$(183^*)\qquad \Gamma' = 0.$$

Si W n'existe pas, le système (186) peut être remplacé par le suivant :

$$(187)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h_-=0}} \left[\dfrac{1}{h_+}(V_{h_+} - V_0) + \dfrac{1}{h_-}(V_{h_-} - V_0)\right] = -\pi\Gamma - \Gamma' c, \\ \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h_-=0}} \left(\dfrac{\partial V_{h_+}}{\partial s} - \dfrac{\partial V_{h_-}}{\partial s}\right) = -\pi\Gamma - \Gamma' c, \\ \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h'=0}} \left[\dfrac{\partial V_{h_+}}{\partial s} - \dfrac{1}{h'}(V_{h'} - V_0)\right] = \omega\Gamma - \Gamma'(1 + c'), \quad \text{si} \quad \varphi_0 > \omega, \\ \text{mais} \\ \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h'=0}} \left[\dfrac{\partial V_{h_+}}{\partial s} - \dfrac{1}{h'}(V_{h'} - V_0)\right] = (2\pi - \omega)\Gamma - \Gamma'(1 + c'). \\ \qquad \text{si} \quad \varphi_0 < \omega. \\ c = \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h_-=0}} \log\dfrac{h_+}{h_-}, \qquad c' = \lim\limits_{\substack{h_+=0\\h'=0}} \log\dfrac{h_+}{h'}, \end{cases}$$

h_+ et $h'(\varphi_0 > \omega)$ étant les valeurs de h pour deux points du côté positif, h_- et $h'(\varphi < \omega)$ étant les valeurs de h et h' pour deux points correspondants du côté négatif.

Les deuxièmes membres des égalités (187) deviennent identiques à ceux des égalités (186), si

$$(183^*) \qquad \Gamma' = 0,$$

ou si

$$(188) \qquad h_+ = h_- = \frac{h'}{e}.$$

Cas particulier : Point régulier. — Si les deux branches de la courbe ont une tangente commune, nous trouverons $\delta'_0 + \delta''_0 = \pi$, $\varphi'_0 + \varphi''_0 = \pi$,

$$(189) \qquad \therefore \Gamma = (\sigma'_0 + \sigma''_0)\sin\delta'_0, \qquad \Gamma' = (\sigma'_0 - \sigma''_0)\cos\delta'_0.$$

Pour $\sigma'_0 = \sigma''_0$ nous trouverons dans ce cas $\Gamma' = 0$ et

$$(190) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = W_s - \pi\sigma_0 \sin\delta_0, & \dfrac{\partial V_0}{\partial s} = -W_s - \pi\sigma_0 \sin\delta_0, \\ \dfrac{\partial V_+}{\partial s} = W_s - \pi\sigma_0 \sin\varepsilon_0, & \dfrac{\partial V_-}{\partial s} = \quad W_s + \pi\sigma_0 \sin\varepsilon_0; \end{cases}$$

par suite, les limites $\dfrac{\partial V_+}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial V_-}{\partial s}$ sont dans ce cas indépendantes de la direction de la droite P_0P.

Cas II. — $\lim\limits_{h=0} \varphi = 0$, c'est-à-dire que la ligne suivant laquelle se meut le point P vers le point P_0 touche, au point P_0, une des branches de la courbe où est concentrée la masse. Dans ce cas la quantité q devient infiniment petite pour des valeurs infiniment petites de h, car alors $\lim\limits_{h=0} u = 1$.

Avant de passer à la limite pour $\lim h = 0$ dans les égalités (179), il faut étudier séparément les quantités

$$(191) \qquad \begin{cases} O_1 = \displaystyle\int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht)\frac{tu-1}{q^2}\,dt \\ \text{et} \\ O_2 = \displaystyle\int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht)\sin\varphi\,\frac{t\,dt}{q^2}, \qquad 0 < \varkappa < 1, \end{cases}$$

où σ et u se rapportent à la branche en question.

En posant

$$(192)\qquad \begin{cases} t = 1 - \tau & \text{pour} \quad 1 - \varkappa \leqq t \leqq 1 \\ \text{et} & \\ t = \tau - 1 & \text{pour} \quad 1 \leqq t \leqq 1 + \varkappa \end{cases}$$

et en observant que

$$\frac{1-u}{q^2} = \frac{1-u}{(t-1)^2 + 2t(1-u)} \leqq 1.$$

nous trouverons que la quantité O_1 peut s'écrire

$$O_1 = \int_0^{\varkappa} \left[\frac{\sigma(h+h\tau)}{q_+^2} - \frac{\sigma(h-h\tau)}{q_-^2} \right] \tau \, d\tau + a_1, \quad \lim_{h=0} a_1 \equiv a'_1 \text{ finie}, \quad \lim_{\varkappa=0} a'_1 = 0,$$

$$q_+ = \sqrt{\tau^2 + 2(1+\tau)(1-u_+)},$$

$$q_- \equiv \sqrt{\tau^2 + 2(1-\tau)(1-u_-)},$$

$$u_+ = \cos\varphi_+, \qquad u_- = \cos\varphi_-, \qquad \varphi_+ = \varphi(h+h\tau, h), \qquad \varphi_- = \varphi(h-h\tau, h).$$

Or, en posant

$$q' \equiv \sqrt{\tau^2 + 2(1-\tau)(1-u_+)},$$

nous trouverons

$$0 \leqq \frac{\tau}{q'^2} - \frac{\tau}{q_+^2} = \frac{4\tau^2(1-u_+)}{q'^2 q_+^2} \leqq 4,$$

$$\therefore \int_0^{\varkappa} \sigma(h+h\tau) \frac{\tau \, d\tau}{q_+^2} = \int_0^{\varkappa} \sigma(h+h\tau) \frac{\tau \, d\tau}{q'^2} - 4 \int_0^{\varkappa} \sigma(h+h\tau) \frac{\tau^2(1-u_+) \, d\tau}{q'^2 q_+^2},$$

où le deuxième terme du second membre a pour $\lim h = 0$, une valeur limite finie qui devient infiniment petite en même temps que $\varkappa$. Posons de plus

$$\bar{q} = \sqrt{\tau^2 + \varphi_+^2},$$

$$2(1-u_+) = \varphi_+^2 - \varphi_+^4 \mu(\varphi_+), \qquad \therefore \mu(0) = \frac{1}{12},$$

$$\therefore 0 < \frac{\tau}{q'^2} - \frac{\tau}{\bar{q}^2} = \frac{\tau \varphi_+^4 \mu}{q'^2 \bar{q}^2} + \frac{\tau^2 \varphi_+^2 (1 - \varphi_+^2 \mu)}{q'^2 \bar{q}^2}.$$

Mais

$$\frac{\varphi_+}{q'} \leqq \frac{1}{\sqrt{(1-\varphi_+^2\mu)(1-\tau)}},$$

$\therefore$ pour des petites valeurs de τ et φ

$$0 < \frac{\tau}{q'^2} - \frac{\tau}{\overline{q}^2} < \text{une constante finie,}$$

$$\therefore \int_0^{\varkappa} \frac{\sigma(h+h\tau)}{q_+^2}\tau\,d\tau = \int_0^{\varkappa} \frac{\sigma(h+h\tau)}{\overline{q}^2}\tau\,d\tau + a_2$$

$$= \int_1^{1+\varkappa} \frac{\sigma(ht)}{(t-1)^2+\varphi^2}(t-1)\,dt + a_2,$$

$$\lim_{h=0} a_2 \equiv a'_2 \text{ finie,} \qquad \lim_{\varkappa=0} a'_2 = 0.$$

En traitant les quantités

$$\int_0^{\varkappa} \frac{\sigma(h-h\tau)}{q_-^2}\tau\,d\tau \qquad \text{et} \qquad O_2$$

d'une manière analogue, nous trouverons le théorème suivant :

Théorème. — *Si le point* P *se meut suivant une ligne* P_0P *qui, au point* P_0, *touche une branche de la courbe qui est pourvue de masse, pour que* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *soit finie, il faut et il suffit que*

$$(193) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{h=0}(W_h + O_h) \qquad \text{soit finie,} \\ \text{où} \\ O_h = \cos\omega \displaystyle\int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht)\frac{(t-1)\,dt}{(t-1)^2+\varphi^2} + \sin\omega \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht)\frac{\varphi\,dt}{(t-1)^2+\varphi^2}, \\ 0 < \varkappa < 1. \end{array} \right.$$

Si

$$(194) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\varkappa=0} O = 0, \\ \text{où} \\ O \equiv \lim\limits_{h=0} O_h, \end{array} \right.$$

la valeur de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *sera donnée dans le système* (181) *en y posant* $\varphi_0 = 0$ *pour la branche en question.*

11. *Continuité de la dérivée.* — L'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point situé sur la courbe matérielle ou de la limite de la dérivée extérieure dépend essentiellement de l'existence de la quantité

$$W_s = \lim_{h=0} W_s^{(h)}.$$

Cette quantité $W_s^{(h)}$, rapportée à un point P situé sur une branche de la courbe matérielle, à la distance k du point P_0, peut s'écrire

$$(195)\quad \begin{cases} W_s^{(h)} = \displaystyle\int_{\overline{\mu_{(h)}}}^{\mu_0} \frac{\partial \log \frac{1}{R}}{\partial s}\,\partial\mu = \int_{\overline{\mu_{(h)}}}^{\mu_0} v\,\frac{d\mu}{R}, \\ R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rku + k^2}, \\ k = P_0 P, \\ u = \cos(k, r) = \cos\varphi, \\ v = \cos(R, ds) = \dfrac{ru - k}{R}\cos\omega + \dfrac{r\sin\varphi}{R}\sin\omega, \end{cases}$$

$\overline{\mu_{(h)}}$ étant la somme des éléments de masse pour lesquels $R < h$, $\omega =$ l'angle(k, ds) et $\varphi =$ l'angle(k, r). Posons

$$(196)\quad \begin{cases} r = ks, \\ R = kp, \qquad \therefore p = \sqrt{s^2 - 2su + 1}, \\ d\mu = k\,d\mu', \\ \overline{\mu_{(h)}} = k\,\mu'_h, \\ \therefore W_h = \cos\omega \displaystyle\int_{\mu'_{(h)}}^{\frac{\mu_0}{k}} \frac{su - 1}{p^2}\,d\mu' + \sin\omega \int_{\mu'_h}^{\frac{\mu_0}{k}} s\sin\varphi\,\frac{d\mu'}{p^2}, \end{cases}$$

où p ne peut s'évanouir que pour $\overline{\mu_{(h)}} = 0$, car alors

$$s = u = 1.$$

En procédant comme dans le paragraphe précédent, nous trouverons le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la quantité* W *qui correspond au point* $P(r = k > 0)$ *de la courbe* *matérielle existe, est que la quantité*

$$(197)\quad \begin{cases} H = \lim\limits_{h=0} H_h \quad \text{existe}, \\ \text{où} \\ H_h = \cos\omega \displaystyle\int_{\mu'_h}^{\mu'_\varkappa} \frac{s-1}{(s-1)^2+\varphi^2}\, d\mu' + \sin\omega \int_{\mu'_h}^{\mu'_\varkappa} \frac{\varphi\, d\mu'}{(s-1)^2+\varphi^2}, \\ \qquad\qquad \lim\limits_{h=0} \mu'_h = 0, \end{cases}$$

$\mu'_\varkappa$ étant la valeur de μ' pour $R = k\varkappa$, $\varkappa$ étant une constante arbitraire telle que

$$0 < \varkappa < 1.$$

D'autre part, la quantité

$$(198)\quad \lim_{h=0}(W_s^{(h)} - H_h) = \int_0^{\mu'_\varkappa} \left[\cos\omega\left(\frac{su-1}{p^2} - \frac{s-1}{\overline{s-1}^2+\varphi^2}\right) + \sin\omega\left(\frac{s\sin\varphi}{p^2} - \frac{\varphi}{\overline{s-1}^2+\varphi^2}\right)\right] d\mu' + \int_{\mu'_\varkappa}^{\frac{a_0}{k}} \left(\cos\omega\frac{su-1}{p^2} + \sin\omega\frac{s\sin\varphi}{p^2}\right) d\mu'$$

est continue par rapport à k, si k est > 0, et la limite pour $\mu'_\varkappa = 0$ du premier terme du second membre de (198) est égale à zéro. Ce terme peut donc s'écrire

$$\int_0^{\mu'_\varkappa} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\mu'_\varkappa}, \qquad \alpha > 0,$$

où α peut être prise assez petite pour que $\int_0^{\alpha}$ soit aussi petite qu'on le voudra. L'intégrale $\int_{\alpha}^{\mu'_\varkappa}$ a une valeur limite nulle pour $\lim k = 0$, $\lim\limits_{k=0} \varphi$ étant $= 0$, et p étant toujours > 0, parce que $\overline{s-1}^2$ ne peut pas s'évanouir entre les limites α et $\mu'_\varkappa$ de l'intégration. D'où il suit que la limite pour $k = 0$ du premier terme du second membre de l'égalité (198) est égale à zéro. Soient Q_1 et Q_2 les deux points de l'un et de l'autre côté de P pour lesquels $\bar\mu = \overline{\mu_\varkappa}$, $\bar\mu$ étant comptée à zéro au point P, et soit le point Q, situé entre P_0 et P. Soit de plus Q_3 un point de l'autre branche pour lequel $P_0Q_3 = P_0Q_2$. Posons

$$P_0Q_1 = ks_1, \qquad P_0Q_2 = ks_2,$$

et soit μ_1 la masse qui se trouve entre les points Q_1 et Q_3. Posons

$$(199)\quad \left\{\begin{aligned} -H_k^0 &= \int_{(\mu_1)} \left(\cos\omega \frac{su-1}{p^2} + \sin\omega\sin\varphi \frac{s}{p^2}\right) d\mu' \\ &\quad + \int_{\frac{\mu(ks_1)}{k}}^{\frac{\mu}{k}} \left[\cos\omega\left(\frac{su-1}{p^2} - \frac{u}{s}\right) + \sin\omega\sin\varphi\left(\frac{s}{p^2} - \frac{u}{s}\right)\right] d\mu' \\ &\quad - \int_{\frac{\mu(k)}{k}}^{\frac{\mu(ks)}{k^2}} \cos(\varphi - \omega)\frac{d\mu'}{s}, \\ W_k^0 &= \int_{\mu(k)}^{\mu_0} \cos(\varphi-\omega)\frac{d\mu}{r}; \end{aligned}\right.$$

Le deuxième terme du second membre de l'égalité (198) est

$$W_k^0 - H_k^0.$$

Posons

$$(200)\quad \left\{\begin{aligned} \lim_{k=0} H_k^0 &= H^0, \\ \lim_{k=0} W_k^0 &= W^0, \end{aligned}\right.$$

$$(201)\qquad \therefore \lim_{h=0}(W_h - H_h) = W^0 - H^0 + b, \qquad \lim_{k=0} b = 0,$$

où W^0 est égale à la valeur de W_s pour le point P_0. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ *soit continue lorsque le point* P *se déplace suivant la courbe,* $P_0P > 0$, *est que la quantité*

$$(202)\qquad H + Q \quad \textit{soit continue au point } P,$$

H *étant donnée par les équations* (197) *et la quantité* Q (167) *étant rapportée au point* P.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ *soit continue* *au point* P_0 *suivant une branche de la courbe, est qu'elle y existe et que*

$$\lim_{k=0}(H + Q) = H^0 + Q^0, \tag{203}$$

H^0 *étant donnée par l'équation* (200), *et* Q^0 *étant la valeur de* Q *au point* P_0.

Pour la continuité de $\lim\limits_{h-0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ *il faut remplacer* Q *par* Q' (181) *et* Q_0 *par* Q_0, Q' *étant rapportée au point* P *et* Q'_0 *au point* P_0.

Remarque I. — Soit par rapport au point P

$$d\mu = \overline{\sigma}\, dR, \qquad \overline{\sigma_0} = \lim_{R=0} \overline{\sigma}. \tag{204}$$

Si $\overline{\sigma_0}$ est continue lorsque le point P se déplace sur la courbe, et si, au point P et dans tout le voisinage de P, la courbe a une tangente unique et bien déterminée, les quantités Q et Q′ sont continues; par suite, la continuité de la dérivée $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ et de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ dépend de la continuité de la seule quantité H, H^0 étant considérée comme la valeur de H au point P_0.

Remarque II. — Soit par rapport au point P_0

$$d\mu = \sum \sigma\, dr, \qquad \lim_{r=0} \sigma = \sigma'_0 \qquad \text{et} \qquad = \sigma''_0 \tag{205}$$

pour les deux branches,

$$\begin{aligned}
\therefore -H^0 = \sigma'_0 \cos\omega \int_0^{s_1^0} \frac{ds}{s-1} &+ \sigma'_0 \cos\omega \int_{s_2^0}^{\infty} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) ds - \sigma'_0 \cos\omega \int_1^{s_2^0} \frac{ds}{s} \\
&+ \sigma''_0 \int_0^{s_0^2} \left(\cos\omega \frac{su_0 - 1}{p_0^2} - \sin\omega \sin\gamma \frac{s}{p_0^2}\right) ds \\
&+ \sigma''_0 \int_{s_2^0}^{\infty} \left[\cos\omega \left(\frac{su_0 - 1}{p_0^2} - \frac{u_0}{s}\right) - \sin\omega \sin\gamma \left(\frac{s}{p_0^2} - \frac{1}{s}\right)\right] \\
&- \sigma''_0 \cos(\gamma + \omega) \int_1^{s_2^0} \frac{ds}{s},
\end{aligned}$$

où

$$s_1^0 = \lim_{k=0} s_1, \qquad s_2^0 = \lim_{k=0} s_2,$$

$$u_0 = \cos\gamma, \qquad p_0 = \sqrt{s^2 = 2su_0 + 1}, \qquad \gamma = \lim_{r=0} \rho$$

pour l'autre branche égale l'angle que font, au point P_0, les deux tangentes des deux branches. En intégrant et en supposant $s_1^0 < 1$ et $s_2^0 > 1$, nous obtiendrons

$$H^0 = \sigma_0' \cos\omega \log \frac{s_2^0 - 1}{1 - s_1^0} + \sigma_0''(\pi - \gamma)\sin(\gamma + \omega).$$

Or

$$s_1 = 1 - \varkappa, \qquad s_2 = 1 + \varkappa,$$

(206) $$\therefore H^0 = \sigma_0''(\pi - \gamma)\sin(\gamma + \omega).$$

La quantité H_h peut s'écrire (197)

$$H_h = \int_{1-\varkappa_1}^{1-\alpha_1} \sigma \frac{(s-1)\cos\omega + \varphi \sin\omega}{\overline{s-1}^2 + \varphi^2}\,ds + \int_{1+\alpha_2}^{1+\varkappa_2} \frac{(s-1)\cos\omega + \varphi\sin\omega}{\overline{s-1}^2 + \varphi^2}\,ds,$$

où $1 - \varkappa_1 = s_1$, $1 - \varkappa_2 = s_2$, et où $1 - \alpha_1$ et $1 + \alpha_2$ sont les valeurs de s aux deux points pour lesquels $\overline{\mu} = \overline{\mu_{(h)}}$, $\overline{\mu_{(h)}}$ étant rapportée au point P,

$$\therefore \lim_{h=0} \alpha_1 = \lim_{h=0} \alpha_2 = 0, \qquad \lim_{k=0} \varkappa_1 = \lim_{k=0} \varkappa_2 = \varkappa.$$

Posons d'une part $1 - s = \tau$ et de l'autre $s - 1 = \tau$; nous trouverons

(207) $$\left\{\begin{aligned} H_h = {} & \cos\omega \int_{\alpha_1}^{\varkappa} \left[\frac{\sigma(k + h\tau)}{\tau^2 + \varphi_+^2} - \frac{\sigma(k - h\tau)}{\tau^2 + \varphi_-^2}\right]\tau\,d\tau \\ & + \sin\omega \int_{\alpha_1}^{\varkappa} \left[\frac{\sigma(k + h\tau)\varphi_+}{\tau^2 + \varphi_+^2} + \frac{\sigma(k - h\tau)\varphi_-}{\tau^2 + \varphi_-^2}\right] d\tau \\ & + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\sigma(k + h\tau)(\tau\cos\omega + \varphi\sin\omega)}{\tau^2 + \varphi_+^2}\,d\tau + \beta, \end{aligned}\right.$$

φ_+ et φ_- étant ce que deviendra φ en y remplaçant s par $1 + \tau$ et $1 - \tau$ respectivement; β est indépendante de α_1 et α_2 et $\lim_{h=0} \beta = 0$.

Cas particuliers. — 1° *Point régulier.* — Si le point P_0 est un point régulier, nous aurons

(208) $$\left\{\begin{aligned} & \gamma = \pi, \\ & \therefore H^0 = 0. \end{aligned}\right.$$

2° *Ligne droite.* — Pour $\varphi = 0$, respectivement $= \pi$ pour les deux branches, nous trouverons

$$(209)\quad \begin{cases} H^0 = 0, \\ H = \cos\omega \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_{\mu'_h}^{\mu'_\varkappa} \frac{d\mu'}{s-1} = \cos\omega \lim\limits_{\alpha=0} \int_{\alpha}^{\varkappa} \frac{\sigma(k+k\tau)-\sigma(k-k\tau)}{\tau}\,d\tau. \end{cases}$$

La dérivée normale est toujours finie, et sa valeur est (172)

$$(210)\quad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\pi}{2}(\sigma_1+\sigma_2),$$

σ_1 et σ_2 étant les valeurs limites de σ des deux côtés du point P. La condition pour la continuité au point P_0 de toute autre dérivée est que $\lim\limits_{k=0} H = 0$. Cette condition peut être écrite

$$(211)\quad \lim_{k=0}\int_0^k \frac{\sigma(k+x)-\sigma(k-x)}{x}\,dx = 0.$$

La condition de l'existence de $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ au point P_0 est

$$(212)\quad W^0 = \cos\omega \int_0^a (\sigma'-\sigma'')\frac{dr}{r} = \text{une quantité finie},$$

σ' et σ'' se rapportant aux deux branches de la droite des deux côtés du point P_0.

3° *Ligne brisée.* — Pour $\varphi = 0$ et $= -\gamma$ respectivement, nous trouverons

$$(213)\quad \begin{cases} H^0 = \sigma''_0(\pi-\gamma)\sin(\gamma+\omega), \\ H = \cos\omega \displaystyle\int_0^{\varkappa} \frac{\sigma(k+k\tau)-\sigma(k-k\tau)}{\tau}\,d\tau, \qquad 0<\varkappa \leqq 1, \\ W^0 = \displaystyle\int_0^a [\sigma'\cos\omega + \sigma''\cos(\gamma+\omega)]\frac{dr}{r}, \\ Q^0 = \sigma'_0[\cos\omega - (\pi-|\omega|)\sin|\omega|] \\ \qquad + \sigma''_0[\cos(\gamma+\omega) - (\pi-|\gamma+\omega|)\sin|\gamma+\omega|], \\ Q'_0 = -\sigma'_0(\pi-\varphi_0)\sin\omega - \sigma''_0(\pi-|\gamma+\varphi_0|)\sin(\gamma+\omega), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad \lim\limits_{k=0} Q = -\pi\sigma'_0\sin|\omega|, \qquad \lim\limits_{k=0} Q' = -\pi\sigma'_0\sin\omega, \end{cases}$$

φ_0 et ω étant les angles que font le chemin P_0P et l'élément ds respectivement avec une branche. Si W^0 existe,

$$(214)\quad \left\{\begin{aligned} &\sigma_0' \cos\omega + \sigma_0'' \cos(\gamma+\omega) = 0, \\ &\therefore Q_0 = -\sigma_0'(\pi - |\omega|)\sin|\omega| - \sigma_0''(\pi - |\gamma+\omega|)\sin|\gamma+\omega|, \end{aligned}\right.$$

$\therefore$ la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ soit continue au point P_0 est que V^0 existe et que

$$(215)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{k=0} H = \omega\Gamma_1, \\ &\Gamma_1 = \sigma_0' \sin\omega + \sigma_0'' \sin(\gamma+\omega), \qquad -\gamma \leqq \omega \leqq 2\pi - \gamma. \end{aligned}\right.$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ soit continue, il faut et il suffit que W_0 existe et que

$$(216)\qquad \lim_{k=0} H = \varphi_0 \Gamma_1.$$

Remarque. — Si $\gamma \neq \pi$ et si W existe, Γ_1 n'est pas nul (214). Par suite $\lim\limits_{k=0} H$ n'est pas nul, si $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ est continue. Mais H est indépendante de φ_0, $\therefore$ si $\gamma \neq \pi$ la quantité $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ ne peut pas être continue que pour une valeur unique de φ_0. L'égalité (216) peut s'écrire

$$(216')\quad \varphi_0[\sigma_0' \sin\omega + \sigma_0'' \sin(\gamma+\omega)] = \cos\omega \lim_{k=0} \int_0^k \frac{\sigma(k+x) - \sigma(k-x)}{x}\, dx.$$

CHAPITRE III.

LA DÉRIVÉE SECONDE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE D'UNE LIGNE PLANE.

12. *La ligne est une droite. Dérivée suivant la ligne.* — Nous supposerons dans ce paragraphe que la masse est concentrée sur une *droite*, et qu'on peut écrire l'élément de masse $d\mu$ sous la forme suivante :

$$(217)\quad \left\{\begin{aligned} &d\mu = [\sigma_0 + x\bar\sigma(x)]\,dx, \quad \lim_{x=0} \bar\sigma(x) \text{ finie} = \bar\sigma_0 \quad \text{pour} \quad x > 0, \\ &d\mu = [\sigma_1 + x\bar\sigma(x)]\,dx, \quad \lim_{x=0} \bar\sigma(x) \text{ finie} = \bar\sigma_1 \quad \text{pour} \quad x < 0, \end{aligned}\right.$$

σ_0 et σ_1 étant des constantes, et la droite considérée étant prise pour axe des x. Nous trouverons pour l'origine P_0 (170), en observant que $r = x$ pour $x > 0$ et $= -x$ pour $x < 0$, et que l'angle $(r, ds) = \delta$ pour $x > 0$, mais $= \pi - \delta$ pour $x < 0$,

$$(218) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0 = W_0 + Q_0, \\ &W_0 \quad = W_0^0 + \overline{W}_0, \\ &W_0^0 \quad \equiv \lim_{x=0} \left[(\sigma_0 - \sigma_1) \cos\delta \log \frac{a}{h} \right], \\ &\overline{W}_0 \quad \equiv \cos\delta \int_0^a \left[\overline{\sigma}(x) + \overline{\sigma}(-x) \right] dx, \\ &Q_0 \quad = (\sigma_0 - \sigma_1) \cos\delta - \pi\sigma_0 \sin\delta + (\sigma_0 - \sigma_1)\delta \sin\delta, \qquad \delta > 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0$ existe, il faut et il suffit ou que $\delta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que la dérivée soit normale, ou que $\sigma = \sigma_0$. Nous trouverons pour les deux cas

$$(219^a) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 = -\frac{\pi}{2}(\sigma_0 + \sigma_1),$$

$$(219^b) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0 = \cos\delta \int_0^a \left[\overline{\sigma}(x) + \overline{\sigma}(-x) \right] dx - \pi\sigma_0 \sin\delta, \\ &\sigma_1 = \sigma_0. \end{aligned} \right.$$

Pour le point P, situé sur l'axe des x positifs à la distance k de l'origine, nous trouverons de même

$$(220) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} = {} & k \cos\delta \int_a^{a-k} \frac{\overline{\sigma}(k + x') - \overline{\sigma}(k - x')}{x'} dx' \\ & - k \cos\delta \int_{a-k}^{a+k} \overline{\sigma}(k - x') \frac{dx'}{x'} + \cos\delta \int_{-a}^{a} \overline{\sigma}(x)\, dx \\ & - \pi \left[\sigma_0 + k\, \overline{\sigma}(k) \right] \sin\delta \\ & - \sigma_1 \cos\delta \log \frac{a+k}{a-k} + (\sigma_0 - \sigma_1) \cos\delta \log \frac{a-k}{k}, \end{aligned}$$

$$(221^a) \qquad \therefore \frac{1}{k} \left[\frac{\partial V}{\partial n} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 \right] = -\frac{1}{h}\frac{\pi}{2}(\sigma_0 - \sigma_1) - \pi\, \overline{\sigma}(k),$$

$$(221^b) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{k} \left[\frac{\partial V}{\partial s} - \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0 \right] = \cos\delta \int_0^{a-k} \frac{\overline{\sigma}(k + x') - \overline{\sigma}(k - x')}{x'} dx' - \pi\, \overline{\sigma}(k) \sin\delta \\ &\qquad - \frac{\sigma_0}{k} \cos\delta \log \frac{a+k}{a-k} - \cos\delta \int_{a-k}^{a+k} \overline{\sigma}(k - x') \frac{dx'}{x'}, \\ &\sigma_1 = \sigma_0. \end{aligned} \right.$$

Des égalités (221^a) et (221^b) nous tirons le résultat suivant :

Théorème. — *Si la masse est répandue sur une droite de la manière* (217), *il faut et il suffit pour l'existence de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial s}$ *suivant la droite que*

$$(222)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_0, \\ \textit{et que} \\ \overline{\Pi}_0 = \textit{une quantité finie}, \\ \textit{où} \\ \overline{\Pi}_0 \equiv \lim\limits_{h=0} \cos\delta \displaystyle\int_0^{a-h} \frac{\overline{\sigma}(h+x') - \overline{\sigma}(h-x')}{x'}\, dx', \end{array}\right.$$

et la valeur de la dérivée est donnée par la formule

$$(223)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial s} = -\frac{2}{a}\sigma_0 \cos\delta - \pi\overline{\sigma}_0 \sin\delta + \overline{\Pi}_0.$$

Remarque. — Si l'élément ds est pris suivant la normale, la seule condition à remplir est $\sigma_1 = \sigma_0$, et l'on trouvera

$$(223^a)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial n} = -\pi\overline{\sigma}_0.$$

15. *Dérivée extérieure en un point de la ligne.* — Si le point P se trouve extérieurement aux masses qui, par hypothèse, sont concentrées sur une courbe quelconque, nous avons trouvé (§ **10**), en posant $P_0P = h$, $r = ht$, $R = hq$ (179, 181), P_0 étant pris sur la courbe,

$$(224)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \cos\omega \dfrac{\partial V_h}{\partial s_1} + \sin\omega \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2}, \\[2ex] \dfrac{\partial V_h}{\partial s_1} = \displaystyle\sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma \frac{tu-1}{q^2}\, dt, \\[2ex] \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2} = \displaystyle\sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma \sin\varphi \frac{t\, dt}{q^2}, \\[2ex] \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lim\limits_{h=0} \displaystyle\sum \int_h^a \sigma \cos\varepsilon \frac{ds}{r} - \sum \sigma_0(\pi - \varphi_0)\sin\varepsilon_0, \qquad \varphi_0 > 0, \\[2ex] \qquad q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \qquad u = \cos\varphi, \qquad \varepsilon = (r, ds), \\ \qquad \varphi = (P_0P, r), \qquad \omega = (P_0P, ds), \qquad \varepsilon_0 = \lim\limits_{r=0} \varepsilon. \end{array}\right.$$

où la somme est prise pour toutes les branches de la courbe. L'angle ω est compté positif dans une direction telle que ds se trouve du même côté de la droite P_0P que r,

$$(225) \qquad \therefore \varepsilon = \varphi - \omega, \qquad 0 < \varphi_0 < 2\pi, \qquad 0 \leqq \omega \leqq 2\pi.$$

Supposons pour chaque branche

$$(226) \qquad \sigma = \sigma_0 + r\bar{\sigma}(r), \qquad \lim_{r=0} \bar{\sigma}(r) \text{ finie} = \bar{\sigma}_0,$$

et posons

$$(227) \qquad V_h = V_h^0 + \overline{V}_h,$$

V_h^0 et $\overline{V_h}$ étant ce que deviendra V_h en y substituant à la quantité σ les valeurs σ_0 et $r\bar{\sigma}$ respectivement. Enfin nous supposerons pour chaque branche

$$(228) \qquad \varphi = \varphi_0 + r\bar{\varphi}(r), \qquad \lim_{r=0} \bar{\varphi} \text{ finie} = \bar{\varphi}_0,$$

φ_0 étant une constante. Nous aurons

$$\frac{tu-1}{q^2} = \frac{u}{t} + \frac{2u^2-1}{t^2} + \frac{1}{t^3}P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie};$$

par suite, en posant

$$\frac{tu-1}{q^2} - \frac{u}{t} + \frac{2u^2-1}{t^2} = f(\varphi)$$

et en employant la formule

$$f(\varphi) = f(\varphi_0) + r\bar{\varphi}f'(\varphi_1), \qquad \varphi_1 \equiv \varphi_0 + \theta r\bar{\varphi}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

nous trouverons

$$(229) \quad \begin{cases} \dfrac{tu-1}{q^2} = \dfrac{u}{t} + \dfrac{2u^2-1}{t^2} + \dfrac{tu_0-1}{q_0^2} - \dfrac{u_0}{t} - \dfrac{2u_0^2-1}{t^2} + r\bar{\varphi}F(\varphi_1), \\ F(\varphi_1) \equiv -\sin\varphi_1\left[\dfrac{t}{q_1^2} + \dfrac{2t(tu_1-1)}{q_1^4} - \dfrac{1}{t} - \dfrac{4u_1}{t^2}\right] = -\dfrac{\sin\varphi_1}{t^3}P_1, \\ \qquad \lim_{t=\infty} P_1 \text{ finie}, \end{cases}$$

où u_0 et q_0 d'une part et u_1 et q_1 de l'autre se rapportent aux quantités φ_0 et φ_1. Nous pourrons donc écrire

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h^s}{\partial s_1} - \lim_{h'=0}\frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_1}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \int_0^1 \left(\frac{tu-1}{q^2} - \frac{tu_0-1}{q_0^2}\right) dt \quad \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \int_1^{\frac{a}{h}} \frac{2u_0^2-1}{t^2}\,dt$$

$$- \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \int_{\frac{a}{h}}^{\infty} \left(\frac{tu_0-1}{q_0^2} - \frac{u_0}{t}\right) dt + \sum \sigma_0 \int_1^{\frac{a}{h}} \bar{\varphi}\,F(\varphi_1)\,t\,dt$$

$$+ \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \int_1^{\frac{a}{h}} \left(\frac{u}{t} + \frac{2u^2-1}{t^2}\right) dt - \frac{1}{h}\lim_{h'=0}\sum \sigma_0 \int_{h'}^{a} u\frac{dr}{r},$$

$$\therefore \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h^0}{\partial s_1} - \lim_{h'=0}\frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_1}\right)$$

$$= \sum \sigma_0 \int_h^a \frac{(2u^2-1)-(2u_0^2-1)}{r^2}\,dr - \sum \sigma_0 \bar{\varphi}_0 T_1 \sin\varphi_0$$

$$- \sum \frac{1}{a}\sigma_0(2u_0^2-1) - \frac{1}{h}\lim_{h'=0}\sum \sigma_0 \int_{h'}^{h} u\frac{dr}{r} + \eta_1, \qquad \lim_{h=0}\eta_1 = 0.$$

En supposant $u_0 \neq 1$, nous aurons

$$T_1 = \int_0^1 \left[\frac{t^2}{q_0^2} + \frac{2t^2(tu_0-1)}{q_0^4}\right] dt + \int_1^{\infty} \left[\frac{t^2}{q_0^2} + \frac{2t^2(tu_0-1)}{q_0^4} - 1 - \frac{4u_0}{t}\right] dt$$

$$= 1 - 2u_0 + 2(2u_0^2-1)\frac{\pi-\varphi_0}{\sin\varphi_0}.$$

De plus, nous aurons (186) pour $\omega = 0$

$$\lim_{h'=0}\frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_1} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial s_1}\right)_0 = -\sum \sigma_0 u_0 = 0,$$

$$(230)\quad \begin{cases} \therefore \dfrac{\partial^2 V^0}{\partial s' \partial s_1} = -\sum \dfrac{1}{a}\sigma_0 \cos 2\varphi_0 \\ \qquad + \sum \sigma_0 \bar{\varphi}_0 [\sin 2\varphi_0 - 2(\pi - \varphi_0)\cos 2\varphi_0] + W^{01}, \\ W^{01} = \lim\limits_{h=0} W_h^{01}, \\ W_h^{01} = \sum \sigma_0 \displaystyle\int_h^a (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0)\frac{dr}{r^2} \end{cases}$$

avec la condition (168)

$$(231) \qquad \sum \sigma_0 u_0 = 0,$$

l'élément ds' étant pris dans la direction de P_0P, c'est-à-dire de ds_1.

D'autre part, nous aurons

$$\frac{t\sin\varphi}{q^2} = \frac{\sin\varphi}{t} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{t^2} + \frac{1}{t^3}P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie},$$

et, en employant la même méthode que précédemment, nous trouverons

$$(232) \quad \begin{cases} \dfrac{t\sin\varphi}{q^2} = \dfrac{\sin\varphi}{t} + \dfrac{\sin 2\varphi}{t^2} + \dfrac{t\sin\varphi_0}{q_0^2} - \dfrac{\sin\varphi_0}{t} - \dfrac{\sin 2\varphi_0}{t^2} + r\bar{\varphi}\,F_1(\varphi_1), \\ F_1(\varphi_1) \equiv \dfrac{tu_1}{q_1^2} - \dfrac{2t^2(1-u_1^2)}{q_1^4} - \dfrac{u_1}{t} - \dfrac{2(2u_1^2-1)}{t^2}. \end{cases}$$

Nous pourrons donc écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h^0}{\partial s_2} - \lim_{h'=0}\frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_2}\right) \\ &\quad = \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_0^1\left(\frac{t\sin\varphi}{q^2} - \frac{t\sin\varphi_0}{q_0^2}\right)dt + \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_1^{\frac{a}{h}}(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0)\frac{dt}{t^2} \\ &\qquad + \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_h^a \sin\varphi\frac{dr}{r} - \frac{1}{h}\lim_{h'=0}\sum\sigma_0\int_{h'}^a\sin\varphi\frac{dr}{r} \\ &\qquad - \frac{1}{h}\sum\sigma_0\int_{\frac{a}{h}}^{\infty}\left(\frac{t\sin\varphi_0}{q_0^2} - \frac{\sin\varphi_0}{t}\right)dt + \sum\sigma_0\int_1^{\frac{a}{h}}\bar{\varphi}\,F_1(\varphi_1)\,t\,dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ &\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h^0}{\partial s_2} - \lim_{h'=0}\frac{\partial V_{h'}^0}{\partial s_2}\right) \\ &\quad = \sum\sigma_0\int_h^a(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0)\frac{dr}{r^2} + \sum\sigma_0\bar{\varphi}_0 T_2 \\ &\qquad - \frac{1}{a}\sum\sigma_0\sin 2\varphi_0 - \frac{1}{h}\lim_{h'=0}\sum\sigma_0\int_{h'}^h\sin\varphi\frac{dr}{r} + \eta_2, \qquad \lim_{h=0}\eta_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 \equiv &\int_0^1\left[\frac{t^2u_0}{q_0^2} - \frac{2t^3(1-u_0^2)}{q_0^4}\right]dt \\ &+ \int_1^{\infty}\left[\frac{t^2u_0}{q_0^2} - \frac{2t^3(1-u_0^2)}{q_0^4}\right] - u_0 - \frac{2(2u_0^2-1)}{t}\Bigg]dt \\ &= 1 + u_0 - 2u_0^2 - 2(\pi - \varphi_0)\sin 2\varphi_0. \end{aligned}$$

De plus, nous aurons (186)

(233) $$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h^0}{\partial s_2} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial s_2}\right)_0 = -\Omega \sum \sigma_0 \cos\varphi_0 - \sum \sigma_0 \sin\varphi_0$$

$$\left(\Omega = \frac{\pi}{2} \text{ si } \varphi_0 > \frac{\pi}{2}, \quad \text{mais} \quad \Omega = \frac{3\pi}{2} \text{ si } \varphi_0 < \frac{\pi}{2}\right);$$

(234) $$\left\{\begin{aligned} \therefore \frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s_2} &= -\sum \frac{1}{a}\sigma_0 \sin 2\varphi_0 \\ &\quad - \sum \sigma_0 \varphi_0 [\cos 2\varphi_0 + 2(\pi - \varphi_0)\sin 2\varphi_0] + W^{02}, \\ W^{02} &= \lim_{h=0} W_h^{02}, \\ W_h^{02} &= \sum \sigma_0 \int_h^a [\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0] \frac{dr}{r^2} \end{aligned}\right.$$

avec les conditions

(235) $$\left\{\begin{aligned} &\sum \sigma_0 \sin\varphi_0 = 0, \\ &\sum \sigma_0 \cos\varphi_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Plus généralement, nous trouverons

(236) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s} &= -\sum \frac{1}{a}\sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega) + Q^0 + W^0, \\ Q^0 &= \sum \sigma_0 \bar{\varphi}_0 [\sin(2\varphi_0 - \omega) - 2(\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega)], \\ W^0 &= \lim_{h=0} W_h^0, \\ W_h^0 &= \sum \sigma_0 \int_h^a [\cos(2\varphi - \omega) - \cos(2\varphi_0 - \omega)] \frac{dr}{r^2} \end{aligned}\right.$$

avec les conditions

(237) $$\left\{\begin{aligned} &\sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega) = 0 \\ &\text{et} \\ &\omega \sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - \omega) = 0. \end{aligned}\right.$$

Remarque. — En posant

(238) $$\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s} = \lim_{\substack{h=0\\h'=0}} \left[\frac{1}{h'} \frac{\partial V_h}{\partial s} - \frac{1}{h}(V_h - V)\right],$$

les deux conditions (237) se réduisent à la condition unique (187)

$$(237^*)\quad\left\{\begin{array}{l}\Omega\sum\sigma_0\sin(\varphi_0-\omega)-(1+c')\sum\sigma_0\cos(\varphi_0-\omega),\qquad c'=\log\dfrac{h}{h'},\\ \Omega=\omega\quad\text{pour}\quad\varphi_0>\omega,\qquad\text{mais}\qquad=\omega-2\pi\quad\text{pour}\quad\varphi_0<\omega.\end{array}\right.$$

Enfin, nous aurons

$$\frac{1}{h}\frac{\partial\overline{V}_h}{\partial s}=\cos\omega\sum\int_0^{\frac{a}{h}}\overline{\sigma}\frac{tu-1}{q^2}t\,dt+\sin\omega\sum\int_0^{\frac{a}{h}}\sigma\sin\varphi\frac{t^2\,dt}{q^2},$$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial s}\right)_0=\sum\int_0^{\frac{a}{h}}\overline{\sigma}\cos(\varphi-\omega)\,dt.$$

$$\begin{aligned}\therefore\frac{1}{h}\left[\frac{\partial\overline{V}_h}{\partial s}-\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial s}\right)_0\right]&=\cos\omega\sum\int_0^1\overline{\sigma}\frac{tu-1}{q^2}t\,dt+\sin\omega\sum\int_0^1\overline{\sigma}\sin\varphi\frac{t^2\,dt}{q^2}\\&+\cos\omega\sum\int_1^{\frac{a}{h}}\overline{\sigma}\left(\frac{t^2u-t}{q^2}-u-\frac{2u^2-1}{t}\right)dt\\&+\sin\omega\sum\int_1^{\frac{a}{h}}\overline{\sigma}\sin\varphi\left(\frac{t^2}{q^2}-1-\frac{2u}{t}\right)dt\\&-\sum\int_0^1\overline{\sigma}\cos(\varphi-\omega)\,dt+\sum\int_h^a\overline{\sigma}\cos(2\varphi-\omega)\frac{dr}{r},\end{aligned}$$

$$(239)\quad\left\{\begin{array}{l}\therefore\dfrac{\partial^2\overline{V}}{\partial s'\,\partial s}=-\sum\overline{\sigma}_0(\pi-\varphi_0)\sin(2\varphi_0-\omega)+\overline{W},\\ \qquad\overline{W}=\lim\limits_{h=0}\overline{W}_h,\\ \qquad\overline{W}_h=\sum\displaystyle\int_h^a\overline{\sigma}\cos(2\varphi-\omega)\frac{dr}{r}.\end{array}\right.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si la masse est répandue de manière que pour chaque branche*

$$(226^*)\quad\left\{\begin{array}{l}\qquad d\mu=\sigma\,dr,\\ \sigma=\sigma_0+r\overline{\sigma}(r),\qquad\lim\limits_{r=0}\overline{\sigma}(r)\text{ finie}=\overline{\sigma}_0.\end{array}\right.$$

et si l'angle $\varphi \equiv (ds', r)$ *peut s'écrire*

$$(228^*) \qquad \varphi = \varphi_0 + r\bar{\varphi}(r), \qquad \lim_{r=0} \bar{\varphi}(r) \text{ finie} = \bar{\varphi}_0,$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s}$ *au point* P_0 *sont que les égalités* (237) *soient satisfaites et que la quantité*

$$(240) \qquad W_{s's} = \lim_{h=0} W_{s's}^{h}$$

soit finie, où

$$(241) \qquad W_{s's}^{(h} = \sum \int_h^a [\sigma \cos(2\varphi - \omega) - \sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega)] \frac{dr}{r^2},$$

ω *étant l'angle* (ds', ds). *La valeur de* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s}$ *est donnée par la formule*

$$(242) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s} = W_{s's} + Q - \sum \frac{1}{a} \sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega), \\ &Q \equiv \sum \sigma_0 \bar{\varphi}_0 [\sin(2\varphi_0 - \omega) - 2(\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega)] \\ &\qquad - \sum \bar{\sigma}_0 (\pi - \varphi_0) \sin(2\varphi_0 - \omega), \\ &\qquad\qquad 0 < \varphi_0 < 2\pi. \end{aligned} \right.$$

14. *La limite de la dérivée pour un point extérieur.* — Soit P un point extérieur aux masses, et posons $P_0P = h$. Soient, de plus, ds_1 et ds_2 deux éléments émanant du point P dans des directions qui fassent les angles ω_1 et ω_2 avec la droite P_0P. Si V_h est le potentiel logarithmique des masses pour le point P,

$$(243) \qquad \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int_0^{\mu_0} \frac{\partial^2 \log \frac{1}{R}}{\partial s_1 \partial s_2} d\mu = \sum \int_0^a \sigma (2 e_1 e_2 - e) \frac{dr}{R^2},$$

pour $d\mu = \sigma dr$, où la sommation s'étend sur les diverses branches de la courbe, et où

$$
(244)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}, & \\
r = P_0Q, & \\
u = \cos\varphi, & \varphi = \text{l'angle } (h, r), \\
v_1 = \cos(R, ds_1) = \dfrac{ru_1 - hc_1}{R}, & v_2 = \cos(R, ds_2) = \dfrac{ru_2 - hc_2}{R}, \\
u_1 = \cos(r, ds_1) = \cos(\varphi - \omega_1), & u_2 = \cos(r, ds_2) = \cos(\varphi - \omega_2), \\
c_1 = \cos(h, ds_1) = \cos\omega_1, & c_2 = \cos(h, ds_2) = \cos\omega_2, \\
c = \cos(ds_1, ds_2) = \cos(\omega_2 - \omega_1). &
\end{array}
\right.
$$

P_0 étant un point fixe et Q un point variable de la courbe. Les angles φ, ω_1 et ω_2 sont comptés positifs vers le même côté de la droite P_0P.

Nous supposerons

$$
(226)\qquad \sigma = \sigma_0 + r\,\overline{\sigma}(r), \qquad \lim_{r=0} \overline{\sigma}(r) \text{ finie} = \overline{\sigma}_0,
$$

$$
(228)\qquad \varphi = \varphi_0 + r\,\overline{\varphi}(r), \qquad \lim_{r=0} \overline{\varphi}(r) \text{ finie} = \overline{\varphi}_0,
$$

et nous posons

$$
(245)\qquad V_h = V_h^0 + \overline{V}_h,
$$

où V_h^0 et $\overline{V}_h$ se rapportent à σ_0 et $\overline{\sigma}$ respectivement. En posant

$$
(246)\qquad r = ht, \qquad R = hq, \qquad q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1},
$$

nous trouverons

$$
\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1\,\partial s_2} = \frac{1}{h} \sum \sigma_0 \int_0^{\frac{a}{h}} \left[\frac{2(tu_1 - c_1)(tu_2 - c_2)}{q^2} - c \right] \frac{dt}{q^2}.
$$

Nous aurons

$$
(247)\qquad f \equiv \frac{2(tu_1 - c_1)(tu_2 - c_2)}{q^4} - \frac{c}{q^2} = \frac{2u_1u_2 - c}{t^2} + \frac{1}{t^3}P, \qquad \lim_{t=\infty} P \text{ finie};
$$

par suite, en posant

$$
g(\varphi) \equiv f - \frac{2u_1u_2 - c}{t^2}
$$

et en employant la formule

$$
g(\varphi) = g(\varphi_0) + r\overline{\varphi}\,g'(\varphi_1), \qquad \varphi_1 = \varphi_0 + \theta r\overline{\varphi}, \qquad 0 < \theta < 1,
$$

nous trouverons pour $0 < \varphi_0 < 2\pi$

$$f = f_0 + \frac{2u_1 u_2 - c}{t^2} - \frac{2u_1^0 u_2^0 - c}{t^2} + r\overline{\varphi} g'(\varphi_1), \qquad \lim_{t=\infty}(t^3 g') \text{ finie.}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{a}{h}} f\,dt = \int_0^1 (f - f_0)\,dt$$

$$+ \int_0^{\frac{a}{h}} f_0\,dt + \int_1^{\frac{a}{h}} \left(\frac{2u_1 u_2 - c}{t^2} - \frac{2u_1^0 u_2^0 - c}{t^2}\right) dt + h\int_1^{\frac{a}{h}} t\overline{\varphi} g'(\varphi_1)\,dt,$$

$$(2.78)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1\,\partial s_2} = \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \int_0^{\infty} f_0\,dt - \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \int_{\frac{a}{h}}^{\infty} f_0\,dt + \sum \sigma_0 \overline{\varphi_0}\,\mathrm{T} \\
&\qquad + 2\sum \sigma_0 \int_h^a (u_1 u_2 - u_1^0 u_2^0)\frac{dr}{r^2} + \eta_h, \qquad \lim_{h=0} \eta_h = 0, \\
&\mathrm{T} = \int_0^1 f_0\, t\,dt + \int_1^{\infty} g_0'\, t\,dt, \\
&f' = -\frac{8(tu_1 - c_1)(tu_2 - c_2)t\sin\varphi}{q^6} \\
&\qquad + \frac{2t}{q^4}[-t\sin(2\varphi - \omega_1 - \omega_2) \\
&\qquad\qquad + c_1\sin(\varphi - \omega_2) + c_2\sin(\varphi - \omega_1) + c\sin\varphi]. \\
&g' = f' + \frac{2\sin(2\varphi - \omega_1 - \omega_2)}{t^2},
\end{aligned}\right.$$

$$\therefore \mathrm{T} = -8\sin\varphi_0 u_1^0 u_2^0 a_1 + 8\sin\varphi_0(c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0)a_2 - 8c_1 c_2 \sin\varphi_0 a_3$$
$$- 2\sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)a_4 + 2[c_1\sin(\varphi - \omega_2) + c_2\sin(\varphi - \omega_1) + c\sin\varphi]a_5,$$

$$a_1 = \int_0^{\infty} \frac{t^4\,dt}{q_0^6} = \frac{5u_0 - 2u_0^3 + 3\bar{1}}{8(1 - u_0^2)^2},$$

$$a_2 = \int_0^{\infty} \frac{t^3\,dt}{q_0^6} = \frac{2 + u_0^2 + 3u_0\bar{1}}{8(1 - u_0^2)^2},$$

$$a_3 = \int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{q_0^6} = \frac{3u_0 + (1 + 2u_0^2)\bar{1}}{8(1 - u_0^2)^2},$$

$$a_4 = \int_0^1 \frac{t^3\,dt}{q_0^4} + \int_1^{\infty}\left(\frac{t^3}{q_0^4} - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{2u_0^2 - 1 + u_0(3 - 2u_0^2)\bar{1}}{2(1 - u_0^2)},$$

$$a_5 = \int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{q_0^4} = \frac{u_0 + \bar{1}}{2(1 - u_0^2)},$$

et

$$\mathrm{I} = \frac{\pi - \varphi_0}{\sin\varphi_0}, \qquad \varphi_0 > 0,$$

$$(249) \qquad \therefore \mathrm{T} = 3\sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2(\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2).$$

De plus, nous aurons

$$(250) \qquad \int_0^\infty f_0\,dt = -\cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2),$$

$$(251) \qquad \lim_{h=0}\int_{\frac{a}{h}}^\infty f_0\,dt = \frac{1}{a}(2u_1^0 u_2^0 - c),$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \mathrm{V}^0}{\partial s_1\,\partial s_2} = -\sum \frac{1}{a}\sigma_0(2u_1^0 u_2^0 - c) + 2\sum \sigma_0 \int_h^a (u_1 u_2 - u_1^0 u_2^0)\frac{dr}{r^2}$$
$$+ \sum \sigma_0 \overline{\varphi}_0 \mathrm{T} - \frac{1}{h}\sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + \eta_h^0, \qquad \lim_{h=0}\eta_h^0 = 0.$$

D'autre part, nous aurons

$$\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{V}}_h}{\partial s_1\,\partial s_2} = \sum \int_0^{\frac{a}{h}} \overline{\sigma}\,ft\,dt,$$

et, en traitant cette intégrale de la manière ordinaire, nous trouverons

$$(252) \qquad \frac{\partial^2 \overline{\mathrm{V}}_h}{\partial s_1\,\partial s_2} = \sum \int_h^a \overline{\sigma}(2u_1 u_2 - c)\frac{dr}{r}$$
$$-\sum \overline{\sigma}_0[2u_1^0 u_2^0 - c + (\pi - \varphi_0)\sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)]$$
$$+ \overline{\eta}_h. \qquad \lim_{h=0}\overline{\eta}_h = 0.$$

En observant que $2u_1 u_2 - c = \cos(2\varphi - \omega_1 - \omega_2)$, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la masse est répandue de manière que pour chaque branche*

$$(226^*) \qquad \begin{cases} d\mu = \sigma\,dr, \\ \sigma = \sigma_0 + r\overline{\sigma}(r), \qquad \lim_{r=0}\overline{\sigma}(r) \text{ finie} = \overline{\sigma}_0, \end{cases}$$

et si l'angle $\varphi = (h, r)$ *peut s'écrire*

$$(228^*) \qquad \varphi = \varphi_0 + r\overline{\varphi}(r), \qquad 0 < \varphi_0 < 2\pi, \qquad \lim_{r=0} \overline{\varphi}(r) \text{ finie} = \overline{\varphi}_0,$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *sont que*

$$(253) \qquad \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) = 0,$$

et que la quantité

$$(254) \qquad W_{s_1 s_2} \equiv \lim_{h=0} W_{s_1 s_2}^h \qquad \text{soit finie,}$$

où

$$(255) \qquad W_{s_1 s_2}^h = \sum \int_h^a [\sigma \cos(2\varphi - \omega_1 - \omega_2) - \sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)] \frac{dr}{r^2}.$$

La valeur de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *est donnée par la formule*

$$(256) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} &= -\sum \frac{1}{a} \sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + W_{s_1 s_2} + \sum \sigma_0 \overline{\varphi}_0 \mathrm{T} - \sum \overline{\sigma}_0 \mathrm{T}, \\ \mathrm{T} &= 3 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2(\pi - \varphi_0) \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2), \\ \mathrm{T} &= \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + (\pi - \varphi_0) \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \right.$$

Corollaires. — 1° *Posons*

$$(257) \qquad C_h \equiv \sum \int_h^a [\overline{\sigma} \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2\sigma_0 \overline{\varphi} \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)] \frac{dr}{r},$$

$$\therefore \lim_{h=0} (W_{s_1 s_2}^h - C_h) = \text{une quantité finie.}$$

Par suite, la condition (254) *peut être remplacée par celle que la quantité*

$$(258) \qquad C = \lim C_h \text{ soit finie.}$$

2° *Si* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *est finie*,

$$(259) \qquad \sum [\overline{\sigma}_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2\sigma_0 \overline{\varphi}_0 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)] = 0.$$

3° *En posant*

$$\left\{\begin{aligned} &\bar\sigma = \bar\sigma_0 + \bar\sigma_1, \qquad \bar\varphi = \bar\varphi_0 + \bar\varphi_1, \\ &\therefore \lim_{r=0} \bar\sigma_1 = \lim_{r=0} \bar\varphi_1 = 0, \end{aligned}\right. \tag{260}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &C_1 = \lim_{h=0} C_1^{(h)}, \\ &C_1^{(h)} = \sum \int_h^a \left[\bar\sigma_1 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2\sigma_0 \bar\varphi_1 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)\right] \frac{dr}{r}, \end{aligned}\right. \tag{261}$$

nous trouverons que la condition (258) *peut être remplacée par l'égalité* (259) *et la condition que la quantité*

$$C_1 \text{ soit finie.} \tag{262}$$

Remarque I. — Pour les diverses directions des éléments ds_1 et ds_2 la quantité $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ ne dépend que de la somme $\omega_1 + \omega_2$.

Remarque II. — En comparant les valeurs de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ et de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s}$, nous trouverons, si les éléments ds' et ds sont pris dans les directions de ds_1 et ds_2 respectivement, qu'il faut remplacer les angles φ et ω du paragraphe **15** par $\varphi - \omega_1$ et $\omega_2 - \omega_1$ respectivement (187),

$$\therefore W_{s's}^{(h)} = W_{s_1 s_2}^{(h)}, \tag{263}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\therefore \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V'_h}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial s}\right) \\ &\quad = - \sum \left[\bar\sigma_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) - 2\sigma_0 \bar\varphi_0 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)\right] \\ &\quad + \omega_1 \sum \left[\bar\sigma_0 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + 2\sigma_0 \bar\varphi_0 \cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)\right] \\ &\quad - \frac{1}{h} \sum \sigma_0 \left[\cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + (\omega_2 - \omega_1)\sin(\varphi_0 - \omega_2)\right] + \eta_h. \\ &\qquad \lim_{h=0} \eta_h = 0. \qquad \omega_2 > \omega_1, \end{aligned}\right. \tag{264}$$

avec la condition pour l'existence de $\dfrac{\partial V}{\partial s}$

$$\sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega_2) = 0. \tag{265}$$

V'_h étant le potentiel au point P' pris sur le prolongement de l'élément ds_1 à la distance $P_0P = h$. Si

$$(266) \qquad (\sin\omega_1 + \omega_2 - \omega_1)\sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - \omega_2) = 0, \qquad \omega_2 > \omega_1,$$

les quantités $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ et $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2}$ existent ou n'existent pas à la fois. Si ces quantités existent, nous trouverons (259, 264, 265 et 266)

$$(267) \quad \lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$$
$$= \omega_1 \sum \left[\bar{\sigma}_0 \sin(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) + 2\sigma_0\bar{\varphi}_0\cos(2\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2)\right].$$

Cas particulier. — Si, au point P_0, la courbe a une tangente unique, les deux valeurs de $\lim\limits_{r=0}(P_0P, r)$ pour les deux branches sont φ_0 et $\varphi_0 + \pi$.

L'égalité (253) se réduit à

$$(268) \qquad (\sigma'_0 - \sigma''_0)\cos(\varphi_0 - \omega_1 - \omega_2) = 0,$$

σ'_0 et σ''_0 étant les valeurs limites de σ_0 pour les deux branches respectives. Pour $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, l'égalité (268) est satisfaite, et l'on trouvera pour la limite de la dérivée normale

$$(269) \quad \lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial n^2} = \frac{1}{a}(\sigma'_0 + \sigma''_0) + \int_0^a (\sigma'\cos 2\varphi' + \sigma''\cos 2\varphi'' - \sigma_0 + \sigma''_0)\frac{dr}{r^2}$$
$$+ \pi(\sigma'_0\bar{\varphi}'_0 - \sigma''_0\bar{\varphi}'') + \bar{\sigma}'_0 + \sigma''_0,$$

les astérisques se rapportant aux deux branches respectives.

La condition (266) se réduit à une identité.

13. *Changement brusque de la dérivée des deux côtés de la courbe.* — Si le point P traverse la courbe suivant une droite qui passe par le point P_0 et arrive à un point P_1 situé à la même distance h de P_0, on aura les mêmes formules que précédemment pour $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2}$ au point P_1, si l'on change φ, ω_1 et ω_2 en $\pi - \varphi$, $\pi - \omega_1$ et $\pi - \omega_2$. En distinguant les deux côtés de la courbe par les signes + et −, nous trouverons

$$(270)\quad\left\{\begin{aligned} \lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2} &= -\sum \frac{1}{a}\sigma_0\cos(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)+W_{s_1s_2}\\ &\quad+\sum \sigma_0\bar{\varphi}_0 T_- - \sum \bar{\sigma}_0\bar{T}_-,\\ T_- &= 3\sin(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)+2\varphi_0\cos(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2),\\ \bar{T}_- &= \cos(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)-\varphi_0\sin(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2),\end{aligned}\right.$$

les conditions (253) et (259) restant les mêmes,

$$(271)\quad \therefore \lim_{h=0}\left(\frac{\partial^2 V_{h_+}}{\partial s_1\,\partial s_2}-\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2}\right) = -\pi\left[\bar{\sigma}_0\sin(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)+2\sigma_0\bar{\varphi}_0\cos(2\varphi_0-\omega_1-\omega_2)\right].$$

De même, si dans les égalités (242) on change la direction de ds' en la direction opposée, on retrouvera les mêmes formules en y changeant φ et ω en $\pi-\varphi$ et $\pi-\omega$. On trouvera

$$(272)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial s'_+\,\partial s}+\frac{\partial^2 V}{\partial s'_-\,\partial s} = -\pi\sum\left[\bar{\sigma}_0\sin(2\varphi_0-\omega)+2\sigma_0\bar{\varphi}_0\cos(2\varphi_0-\omega)\right].$$

Remarque I. — Le premier membre de l'égalité (271) a une valeur finie même dans le cas où $W_{s_1s_2}$ et, par suite, les limites des dérivées elles-mêmes n'existent pas, pourvu que l'égalité (253) soit toujours satisfaite. Des considérations analogues se rapportent à l'égalité (272) en remplaçant le premier membre par la quantité

$$(273)\quad \lim_{h=0}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{\partial V_{h_+}}{\partial s}-\frac{\partial V_+}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial V_{h_-}}{\partial s}-\frac{\partial V_-}{\partial s}\right)\right],\qquad h_+=h_-=h.$$

Remarque II. — Le changement considéré (271) est indépendant de la direction du chemin P_1P_0P et dépend seulement des quantités σ_0, $\overline{\sigma_0}$, $\overline{\varphi_0}$ et de la somme des angles $\varphi_0-\omega_1$ et $\varphi_0-\omega_2$ que font les directions ds_1 et ds_2 avec la tangente de chaque branche au point P_0.

CHAPITRE IV.

DOUBLE LIGNE.

16. *Les fonctions* W *et* W_h. — Menons, par le point variable Q de la courbe matérielle, un vecteur N qui fasse l'angle n avec l'axe des coordonnées polaires, et prenons un point Q' sur ce vecteur dans le sens négatif. Soit

$$h' \equiv QQ'. \tag{274}$$

Nous définirons une fonction W, rapportée au point P_0 de la courbe, par l'équation

$$\left\{\begin{aligned} &W = \lim_{h'=0} W^{(h')}, \\ &\text{où} \\ &W^{(h')} = \sum \int_0^a \frac{\sigma}{h'} \log \frac{r'}{r}\, dr, \\ &r' = P_0Q' = \sqrt{r^2 - 2rh'\cos(\varphi - n) + h'^2}. \end{aligned}\right. \tag{275}$$

Nous trouverons comme dans le paragraphe **9**, en supposant que toutes les distances QQ' soient égales (167),

$$\left\{\begin{aligned} W &= -\lim_{h'=0} W_N^{(h')} + \sum \sigma_0(\pi - |\varphi_0 - n_0|)\sin|\varphi_0 - n_0| \\ &\qquad - \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0), \\ W_N^{(h')} &= \sum \int_{h'}^a \sigma\cos(\varphi - n)\frac{dr}{r}, \qquad n_0 = \lim_{r=0} n. \end{aligned}\right. \tag{276}$$

Si, au contraire, le point Q' est pris dans le sens positif de N, nous aurons

$$r' = \sqrt{r^2 + 2rh\cos(\varphi - n) + h^2},$$

et, en posant $\pi - (\varphi - n)$ au lieu de $(\varphi - n)$, nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned} &W_- = -\lim_{h=0} W_h - \sum \sigma_0(\varphi_0 - n_0)\sin|\varphi_0 - n_0| - \sum \sigma_0\cos(\varphi_0 - n_0), \\ &\varphi_0 - n_0 < \pi \end{aligned}\right. \tag{277}$$

en écrivant, dans ce cas, W_- au lieu de W.

Pour un point extérieur P nous définirons une fonction W_h d'une manière analogue, et nous aurons

$$(278)\qquad \begin{cases} W_h = \sum \int_0^a \sigma \dfrac{\partial \log \frac{1}{R}}{\partial N}\, dr, \\ R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}, \\ h = P_0Q, \\ u = \cos(h, r) = \cos\varphi, \end{cases}$$

dN étant un élément du vecteur N pris dans le sens positif. En nommant ξ et η les coordonnées du point Q, nous pourrons écrire

$$(279)\qquad \begin{cases} W_h = \sum \int_0^a \sigma \cos n \dfrac{\partial \frac{1}{R}}{\partial \xi}\, dr + \sum \int_0^a \sin n \dfrac{\partial \frac{1}{R}}{\partial \eta}\, dr, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \xi} = \cos(x, R) = \dfrac{r\cos v - h\cos\alpha}{R}, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \eta} = \cos(y, R) = \dfrac{r\sin v - h\sin\alpha}{R}, \\ \varphi = v - \alpha, \end{cases}$$

v et α étant les angles que font les droites P_0Q et P_0P avec l'axe des x respectivement,

$$(280)\qquad \therefore W_h = -\sum \int_0^a \sigma[r\cos(v - n) - h\cos(\alpha - n)] \frac{dr}{R^2}.$$

Nous trouverons (181), pour $0 < \varphi_0 < 2\pi$ et en posant $\alpha =$ zéro,

$$(281)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} W_h = -\lim\limits_{h=0} W_N^{(h)} + \sum \sigma_0(\pi - \varphi_0)\sin(\varphi_0 - n_0), \\ W_N^{(h)} = \sum \int_h^a \sigma \cos(\varphi - n) \dfrac{dr}{r} = -\sum \int_h^a \sigma \dfrac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial N}\, dr. \end{cases}$$

Des égalités (276) et (281) nous tirons

$$(282)\quad \lim_{h=0} [W_h - W^{(h)}] = \sum \sigma_0 n_0 \sin(\varphi_0 - n_0) + \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0), \qquad \varphi_0 > n_0.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les quantités* W *et* $\lim_{h=0} W_h$ *existent en même temps, et leur existence dépend de l'existence de la quantité* $\lim_{h=0} W_N^{h'}$ (281).

Remarque I. — Dans la définition de la quantité W_h, il n'a pas été nécessaire de supposer que tous les éléments QQ' soient égaux, comme nous l'avons supposé en définissant la quantité W. Sur l'angle n nous n'avons fait d'autre hypothèse que celle que $n_0 = \lim_{r=0} n$ existe. Si la courbe admet, en chaque point, une tangente bien déterminée, et si le vecteur N est dirigé suivant la normale, les quantités W et W'_h sont les potentiels d'une double couche pour un point de la couche et pour un point extérieur respectif, σ étant le moment de la couche.

Remarque II. — Si $\lim_{h=0} W'_h$ existe,

$$(283)\qquad \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0) = 0.$$

Changement brusque des deux côtés de la courbe. — Si le point P traverse la courbe suivant la droite PP_0P_1, et arrive au point P_1 qui est situé à la même distance h du point P_0, nous trouverons la valeur W_{h-} de W_h au point P_1 si, dans les formules (278) et (281), nous remplaçons φ et n par $\pi - \varphi$ et $\pi - n$, et nous aurons

$$(284)\qquad \lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-}) = \pi \sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - n_0).$$

De même, nous trouverons (276, 277)

$$(285)\qquad W_+ - W_- = \pi \sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - n_0), \qquad \varphi_0 > n_0.$$

Remarque III. — Il suit de l'égalité (284) que $\lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-})$ est indépendante de la direction de la droite P_0P. Cette égalité (284) aura lieu même dans le cas où $\lim_{h=0} W_h$ n'existe pas, et la même considération se rapporte à l'égalité (285) en remplaçant le premier membre par la quantité

$$(286)\qquad \lim_{h'=0}[W^{(h')}_{+} - W^{(h')}_{-}].$$

17. *La dérivée première des fonctions* W_h *et* W. — Nous trouverons (243), en prenant P_0P pour axe des x,

$$(287)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_h}{\partial s} = -\dfrac{1}{h}\sum\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \sigma f\, dt, \\[2ex] f = \dfrac{2(tu_1 - c_1)(tu_2 - c_2)}{q^4} - \dfrac{c}{q^2}, \\[2ex] q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \\[1ex] u\ = \cos(h, r)\ = \cos\varphi, \qquad c\ = \cos(N, ds) = \cos(\omega - n), \\ u_1 = \cos(ds, r) = \cos(\varphi - \omega), \qquad c_1 = \cos(h, ds) = \cos\omega, \\ u_2 = \cos(N, r)\ = \cos(\varphi - n), \qquad c_2 = \cos(h, N)\ = \cos n, \end{cases}$$

et nous supposerons que pour chaque branche les quantités σ, φ et n sont continues par rapport à r. Nous écrivons

$$(288)\qquad \sigma f = \sigma_0 f_0 + \sigma_0(f_1 - f_0) + \sigma_0(f - f_1) + (\sigma - \sigma_0)f,$$

où l'indice zéro se rapporte à la limite pour $r = 0$, et où f_1 est ce que deviendra f en y remplaçant φ par φ_0 sans changer la valeur de n,

$$(289)\qquad \therefore \frac{\partial W_h}{\partial s} = \frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_1 + \frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_2 + \frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_3 + \frac{1}{h}\sum I_4,$$

I_1, I_2, I_3 et I_4 étant les intégrales qui correspondent aux divers termes du second membre de l'égalité (288),

$$\therefore \frac{1}{h} I_1 = -\frac{1}{h}\int_0^{\infty} f_0\, dt + \frac{1}{h}\int_{\frac{a}{h}}^{\infty} f_0\, dt = \frac{1}{h} I' + \frac{1}{h} I''.$$

Mais

$$\lim_{h=0}(\sigma_0 I'' + \sigma_0 I_2 + \sigma_0 I_3 + I_4) = 0,$$

$\therefore$ pour que $\displaystyle\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s}$ soit finie, il faut que (*cf.* 250)

$$(290)\qquad I \equiv \sum \sigma_0 I' = \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega - n_0) = 0.$$

De plus, nous trouverons

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} I'' = -\frac{1}{a}(2u_1^0 u_{20}^0 - c_0),$$

et

(291) $$\frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_1 = \sum \frac{1}{a}\sigma_0(2u_1^0 u_{20}^0 - c_0) + \varepsilon_1, \qquad \lim_{h=0}\varepsilon_1 = 0,$$

$$u_1^0 = \cos(\varphi_0 - \omega), \qquad u_{20}^0 = \cos(\varphi_0 - n_0), \qquad c_0 = \cos(\omega - n_0).$$

Nous supposerons maintenant que, pour chaque branche, on puisse écrire

(292) $$\left\{\begin{array}{lll} \sigma = \sigma_0 + r\overline{\sigma}, & \lim_{r=0}\overline{\sigma} \text{ finie} = \overline{\sigma_0}, & \\ \varphi = \varphi_0 + r\overline{\varphi}, & \lim_{r=0}\overline{\varphi} \text{ finie} = \overline{\varphi_0}, & 0 < \varphi_0 < 2\pi, \\ n = n_0 + r\overline{n}, & \lim_{r=0}\overline{n} \text{ finie} = \overline{n_0}. & \end{array}\right.$$

Nous trouverons

$$\frac{1}{h}I_2 = -\int_0^1 \overline{n_0} f_0 t\,dt - \int_1^\infty \overline{n_0}\left(\overline{f_0}t - \frac{2u_1^0\overline{u_{20}^0} - \overline{c_0}}{t}\right)dt$$
$$-\int_h^a \frac{(2u_1^0u_2^0 - c) - (2u_1^0u_{20}^0 - c_0)}{r^2}\,dr + \varepsilon_2, \qquad \lim_{h=0}\varepsilon_2 = 0,$$

où $u_2^0 = \cos(\varphi_0 - n)$, et où $\overline{f_0}$, $\overline{u_{20}^0}$ et $\overline{c_0}$ sont ce que deviendront f_0, u_{20}^0 et c_0, lorsqu'on y remplace n_0 par $n_0 + \frac{\pi}{2}$; par conséquent (*cf.* 252)

$$\frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_2 = -\sum \sigma_0 \int_h^a [(2u_1^0u_2^0 - c) - (2u_1^0u_{20}^0 - c_0)]\frac{dr}{r^2}$$
$$+\sum \overline{n_0}\sigma_0[\sin(2\varphi_0 - \omega - n_0) - (\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega - n_0)] + \varepsilon_2,$$
$$\lim_{h=0}\varepsilon_2 = 0.$$

De même nous aurons (*cf.* 248, 249)

$$\frac{1}{h}\sum \sigma_0 I_3 = -\sum \sigma_0 \int_h^a [(2u_1u_2 - c) - 2(u_1^0u_2^0 - c)]\frac{dr}{r^2}$$
$$-\sum \sigma_0\overline{\varphi_0}[3\sin(2\varphi_0 - \omega - n_0) - 2(\pi - \varphi_0)\cos(2\varphi_0 - \omega - n_0)] + \varepsilon_3,$$
$$\lim_{h=0}\varepsilon_3 = 0.$$

$$\frac{1}{h}\sum \quad I_4 = \sum \int_h^a \overline{\sigma}(2u_1u_2 - c)\frac{dr}{r}$$
$$+\sum \overline{\sigma_0}[(2u_1^0u_{20}^0 - c_0) + (\pi - \varphi_0)\sin(2\varphi_0 - \omega - n_0)] + \varepsilon_4,$$
$$\lim_{h=0}\varepsilon_4 = 0,$$

et

$$\therefore \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} = -W_{sN} - \sum \frac{1}{a}\sigma_0 \cos w_0$$

$$+ \sum \left[\bar{\sigma}_0 \cos w_0 + \sigma_0(\bar{n}_0 - 3\bar{\varphi}_0)\sin w_0\right]$$

$$+ \sum (\pi - \varphi_0)\left[\bar{\sigma} \sin w_0 + \sigma_0(2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0)\cos w_0\right],$$

$$(293) \quad \left\{ \begin{aligned} & W_{sN} = \lim_{h=0} W_{sN}^{h}, \\ & W_{sN}^{(h)} = -\sum \int_h^a (\sigma \cos w - \sigma_0 \cos w_0)\frac{dr}{r^2}, \\ & w = 2\varphi - \omega - n, \\ & w_0 = 2\varphi_0 - \omega - n_0, \end{aligned} \right.$$

avec la condition (290)

$$(294) \qquad \mathrm{I} = \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega - n_0) = 0.$$

D'où le théorème :

Théorème. — *Sous les suppositions* (292) *les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de* $\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s}$ *sont que l'égalité* (294) *ait lieu, et que la quantité*

$$(295) \qquad W_{sN} \quad (293) \ \textit{soit finie.}$$

Remarque I. — Posons

$$(296) \qquad E_h = \sum \int_h^a \left[\bar{\sigma} \cos w_0 + \sigma_0(\bar{n} - 2\bar{\varphi})\sin w_0\right]\frac{dr}{r},$$

$$\therefore \lim_{h=0} (W_{sN}^{(h)} - E_h) \text{ finie.}$$

$\therefore$ la condition (295) peut être remplacée par celle que la quantité

$$(297) \qquad E = \lim_{h=0} E_h \quad \text{soit finie.}$$

D'où il suit que, si $\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s}$ existe, on aura

$$(298) \qquad \sum \left[\bar{\sigma}_0 \cos w_0 + \sigma_0(n_0 - 2\bar{\varphi}_0)\sin w_0\right] = 0.$$

et

$$(298)\qquad \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} = -W_{sN} - \sum \frac{1}{a}\sigma_0 \cos w_0 - \sum \sigma_0 \overline{\varphi_0} \sin w_0$$
$$+ \sum (\pi - \varphi_0)\left[\overline{\sigma_0} \sin w_0 + \sigma_0 (2\overline{\varphi_0} - \overline{n_0}) \cos w_0\right].$$

Remarque II. — La fonction W d'un point de la courbe peut être traitée de la même manière, en définissant

$$(299)\qquad \frac{\partial W}{\partial s} = \lim_{h=0}\left[\frac{1}{h}\left(W_h - \lim_{h=0} W_{h'}\right) + \frac{1}{h}\left(\lim_{h'=0} W_{h'} - W\right)\right],$$

et nous trouverons

$$(300)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial s} &= -W_{sN} + \sum \frac{1}{a}\sigma_0 \cos w'_0 - \sum \sigma_0 \overline{\varphi_0} \sin w'_0 \\ &\quad + \sum (\pi - \varphi_0)\left[\sigma_0 \sin w'_0 + \sigma_0 (2\overline{\varphi_0} - \overline{n_0}) \cos w'_0\right], \\ W_{sN} &= \lim_{h=0} \sum \int_h^a (\sigma \cos w' - \sigma_0 \cos w'_0)\frac{dr}{r^2}, \\ w' &= 2\varphi - n, \\ w'_0 &= 2\varphi_0 - n_0, \end{aligned}\right.$$

avec les conditions

$$(301)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0) = 0, \\ &\sum \sigma_0 n_0 \sin(\varphi_0 - n_0) = 0, \end{aligned}\right. \qquad \varphi_0 > n_0,$$

l'angle n étant compté à partir de la droite P_0P. La condition que W_{sN} doit être finie peut être remplacée par celle que la quantité F doit être finie, où

$$(302)\qquad F = \lim_{h=0} \sum \int_h^a \left[\overline{\sigma} \cos w'_0 - \sigma_0 (2\varphi - \overline{n}) \sin w'_0\right]\frac{dr}{r}.$$

Si la quantité F est finie,

$$(303)\qquad \sum \left[\sigma_0 \cos w'_0 - \sigma_0 (2\varphi_0 - \overline{n_0}) \sin w'_0\right] = 0.$$

Remarque III. — Pour faire la comparaison des valeurs de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ et de $\dfrac{\partial W}{\partial s}$, il faut, dans les formules de la remarque II, remplacer les angles φ et n par $\varphi - \omega$ et $n - \omega$ respectivement.

Nous trouverons

$$(304) \qquad w' = w,$$

$$(305) \qquad \therefore \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} - \frac{\partial W}{\partial s} = -\omega \sum \left[\overline{\sigma}_0 \sin w_0 + \sigma_0 (2\varphi_0 - \overline{n_0}) \cos w_0\right] + \sum \left[\overline{\sigma}_0 \cos w_0 - \sigma_0 (2\varphi_0 - \overline{n_0}) \sin w_0\right]$$

avec les conditions (294), (295) et (301) qui peuvent s'écrire

$$(306) \qquad \left\{\begin{array}{l} \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - n_0) = 0, \\ \sin\omega \sum \sigma_0 \sin(\varphi_0 - n_0) = \sum \sigma_0 (n_0 - \omega) \sin(\varphi_0 - n_0) = 0, \\ W_{sN} \quad \text{finie.} \end{array}\right.$$

Si cette dernière condition est satisfaite, nous trouverons (298)

$$(305^*) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} - \frac{\partial W}{\partial s} = -\omega \sum \left[\sigma_0 \sin w_0 + \sigma_0 (2\overline{\varphi_0} - \overline{n_0}) \cos w_0\right].$$

Mais la condition que W_{sN} soit finie n'est pas indispensable, en écrivant la formule (305) sous la forme

$$(307) \qquad \lim_{h=0} \left[\frac{\partial W_h}{\partial s} - \frac{1}{h}(W_h - W)\right] = -\omega \sum \left[\sigma_0 \sin w_0 + \sigma_0 (2\varphi_0 - \overline{n_0}) \cos w_0\right] + \sum \left[\overline{\sigma}_0 \cos w_0 - \sigma_0 (2\varphi_0 - \overline{n_0}) \sin w_0\right].$$

Changement brusque en traversant la courbe. — Lorsque le point P traverse la courbe en suivant une droite, les angles φ, ω et n se changent en $\pi - \varphi$, $\pi - \omega$ et $\pi - n$ respectivement, et nous trouverons pour le changement brusque de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ et de $\dfrac{\partial W}{\partial s}$ les valeurs

$$(308) \qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{h=0} \left(\dfrac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \dfrac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right) = \pi \sum \left[\overline{\sigma}_0 \sin w_0 + \sigma_0 (2\overline{\varphi}_0 - \overline{n}_0) \cos w_0\right] \\ \text{avec la seule condition} \\ \sum \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \omega - n_0) = 0, \end{array}\right.$$

et, en observant que W se change en W_- (277),

(309) $$\frac{\partial W_+}{\partial s_+} - \frac{\partial W}{\partial s} = -\pi \sum \left[\bar{\sigma}_0 \sin w'_0 + \sigma_0(2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0)\cos w_0\right]$$

avec les deux conditions (301). La troisième des conditions (306) est dispensable, pourvu que le premier membre de l'égalité (309) soit défini d'une manière analogue à celle du premier membre de l'égalité (308) ou

(309*) $$\lim_{h=0} \frac{1}{h}\left[W_{h+} + W_{h-} - \lim_{h=0}(W_{h'+} + W_{h'-})\right]$$
$$= \pi \sum \left[\bar{\sigma}_0 \sin w'_0 + \sigma_0(2\bar{\varphi}_0 - \bar{n}_0)\cos w'_0\right].$$

18. *Le potentiel logarithmique d'une double ligne.* — Dans ce cas nous supposerons

(310) $$\left\{\begin{aligned} & n_0 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, \\ & 2\bar{\varphi} - \bar{n} = f(r), \\ & \lim_{h=0} \int_h^a f(r)\frac{dr}{r} = \text{une quantité finie.}\end{aligned}\right.$$

C'est ce qui aura lieu, par exemple, si n est l'angle que fait la normale au point Q avec l'axe des x. En effet, on aura, en supposant que la quantité

$$\bar{\varphi}' = \frac{d\bar{\varphi}}{dr}$$

existe,

$$n_0 = r n' + \varphi - \frac{\pi}{2} = \tan^{-1} r\frac{d\varphi}{dr},$$
$$\therefore\ r n = r\bar{\varphi} + \tan^{-1}(r\bar{\varphi} + r^2\bar{\varphi}'), \qquad \ldots.$$

Dans ce cas, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s}$ se réduisent (290 et 297) à

(311) $$\left\{\begin{aligned} & \sum \sigma_0 \sin \omega = 0, \\ & \lim_{h=0} \sum \sin(\varphi_0 - \omega)\int_h^a \sigma\frac{dr}{r} = \text{une quantité finie.}\end{aligned}\right.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\frac{\partial W}{\partial s}$ sont

$$(312)\qquad \begin{cases} \sum \sigma_0 n_0 = 0, \\ \lim\limits_{h=0} \sum \sin\varphi_0 \int_h^a \sigma \frac{dr}{r} = \text{une quantité finie.} \end{cases}$$

Enfin nous trouverons

$$(313)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h-}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h}}{\partial s}\right) = \pi \sum \overline{\sigma}_0 \cos(\varphi_0 - \omega),$$

$$(314)\qquad \frac{\partial W_-}{\partial s_+} + \frac{\partial W}{\partial s} = \pi \sum \overline{\sigma}_0 \cos\varphi_0.$$

Remarque I. — On a

$$(315)\qquad \overline{\varphi}_0 = \frac{1}{2\rho_0},$$

ρ_0 étant le rayon de courbure de la courbe matérielle au point P_0.

Remarque II. — Pour la dérivée suivant la direction P_0P nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s}$ est que la quantité

$$(316)\qquad \lim_{h=0} \sum \sin\varphi_0 \int_h^a \sigma \frac{dr}{r} \text{ soit finie,}$$

et même, si la condition (316) n'est pas satisfaite, nous aurons

$$(317)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right) = \pi \sum \overline{\sigma}_0 \cos\varphi_0.$$

Cas particulier. — *Pour la dérivée normale suivant la normale en un point régulier,* il faut poser $\omega = 0$ et $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ pour les deux branches. En posant $\overline{\sigma} = \overline{\sigma_1}$ et $\overline{\sigma_2}$ pour les deux branches, nous trouverons le résultat suivant :

Théorème. — *Sous les suppositions* (290), (309) *et* (310), *la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\frac{\partial W}{\partial N}$, *et* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial N}$,

dN étant l'élément de la normale qui passe par le point P_0, est que

(318) $$\lim_{h=0}\int_h^a (\bar\sigma_1+\bar\sigma_2)\frac{dr}{r} \text{ soit finie;}$$

et l'on trouvera

(319) $$\frac{\partial W_+}{\partial N'_+}+\frac{\partial W_-}{\partial N'_-}=0.$$

Même dans le cas où la condition (318) n'est pas satisfaite nous trouverons

(320) $$\lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial N'}-\frac{\partial W_{h-}}{\partial N'}\right)=0,$$

le point P étant supposé suivre la normale qui passe par le point P_0.

Remarque III. — Dans l'énoncé du dernier théorème nous n'avons pas supposé que la fonction σ soit continue au point P_0.

Remarque IV. — Pour le potentiel newtonien d'une double couche, M. Liapounoff (¹) a démontré que les deux limites de la dérivée normale existent et sont égales en supposant au lieu de (318) que

(318') $$\lim_{r=0}\frac{1}{r^{1+\beta}}\sum(\sigma-\sigma_0) \text{ soit finie,} \qquad \beta>0.$$

19. *L'existence de la dérivée normale.* — Nous étudierons dans ce paragraphe plus en détail les suppositions qu'il faut faire pour la déduction de la formule (320). Pour la dérivée suivant P_0P nous trouverons (287), en portant $\omega=0$,

(321) $$\left\{\begin{aligned} &\chi=\frac{\partial W_{h+}}{\partial N}-\frac{\partial W'_{h-}}{\partial N'}=-\frac{1}{h}\sum\int_0^{\frac{a}{h}}\sigma(f_+-f_-)\,dt,\\ &f_+=\frac{2(tu-1)(tu_2-c)}{q^4}-\frac{c}{q^2},\\ &f_-=\frac{2(tu+1)(tu_3+c)}{q^4}-\frac{c}{q_-^2},\\ &u=\cos\varphi,\qquad u_2=\cos(\varphi-n),\qquad c=\cos n,\\ &q=\sqrt{t^2-2tu+1},\qquad q_-=\sqrt{t^2+2tu+1}, \end{aligned}\right.$$

(¹) A. Liapounoff, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journ. de Math.*, 1898, p. 241-311).

d'où il suit que, si nous supposons qu'au point P_0 la courbe ait une tangente unique, et que la droite $P_0 P$ soit dirigée suivant la normale, nous pourrons écrire :

$$(322)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{2} + r\bar{\varphi}, & \lim\limits_{r=0}(r\bar{\varphi}) = 0, \\ n = r\bar{n}, & \lim\limits_{r=0}(r\bar{n}) = 0, \\ \therefore u_2 = \sin(r\bar{n} - r\bar{\varphi}), & u = -\sin r\bar{\varphi}, \end{cases}$$

$$(323)\quad \begin{cases} \therefore f_+ - f_- = -\dfrac{4t(u_2 + 2cu)}{p^4} + \dfrac{16cut}{p^6} + \dfrac{u^2}{p^3}\mathrm{P}, \\ p = \sqrt{t^2+1}, \quad \lim\limits_{t=0}\mathrm{P} \text{ finie}, \quad \lim\limits_{t=\infty}\mathrm{P} \text{ finie}. \end{cases}$$

$$\therefore \chi = \mathrm{G} + \mathrm{G}'.$$

$$(324)\quad \begin{cases} \mathrm{G} = \dfrac{4}{h}\sum\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \sigma\left[\dfrac{t(u_2 + 2cu)}{p^4} - \dfrac{4cut}{p^6}\right]dt, \\ \mathrm{G}' = -\dfrac{1}{h}\sum\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \dfrac{u^2}{p^3}\mathrm{P}\,dt. \end{cases}$$

Nous supposerons dans la suite

$$(325)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r=0}(r\bar{\varphi}^2) = 0, \\ \therefore \lim\limits_{h=0}\mathrm{G}' = 0. \end{cases}$$

Posons

$$(326)\quad \begin{cases} \sum \sigma(u_2 + 2cu) = \alpha r, \\ \sum \sigma c u = \beta r, \\ \therefore \mathrm{G} = 4\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \left(\dfrac{\alpha t^2}{p^4} - \dfrac{4\beta t^2}{p^6}\right)dt. \end{cases}$$

Nous distinguerons deux cas :

1° $\lim\limits_{r=0}\beta$ finie $= \beta_0$. Pour que $\lim\limits_{h=0}\chi$ soit finie, il faut que

$$(327)\quad \lim_{h=0} 4\int_0^{\frac{a}{h}} \frac{\alpha t^2\,dt}{p^4} \text{ soit finie.}$$

Si nous supposons que la quantité α ne change pas de signe une infinité de fois pour de petites valeurs de r, la condition (327) peut être remplacée par celle que

$$(328) \qquad \lim_{h=0} \alpha \text{ soit finie } = \alpha_0$$

ou que

$$(328') \qquad \lim_{h=0} \frac{1}{r} \sum \sigma \frac{u_2}{r} \text{ soit finie.}$$

Dans ce cas nous trouverons

$$(329) \qquad \lim_{h=0} \left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial N'} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial N'} \right) = \pi(\alpha_0 - \beta_0).$$

Remarque I. — On peut toujours choisir la fonction $\overline{u}$ de manière que la condition (328) soit satisfaite. De plus, nous pourrons choisir $\overline{u}$ de manière que

$$(330) \qquad \alpha_0 = \beta_0.$$

Si, par exemple, $\overline{\varphi_0}$ est finie, et si u_0 est choisie $= 2\overline{\varphi}_0$ (*cf.* 210), l'égalité (330) est satisfaite.

2° $\lim_{r=0} \beta$ infinie. Posons

$$(331) \quad \begin{cases} \alpha = \gamma\beta, \\ \beta = \omega(h)\,B(t)\,(1+\beta'). \qquad B(t) \text{ finie et } \neq 0, \qquad \lim_{h=0} \beta' = 0. \\ \qquad \therefore \lim_{h=0} \omega(h) \quad \text{et} \quad \lim_{t=0} B(t) \text{ infinies.} \\ \lim_{h=0} h\,\omega(h) = \lim_{t=0} t\,B(t) = \lim_{t=\infty} B(t) = 0 \text{ ou finie.} \end{cases}$$

$$(332) \qquad \therefore G = 4\,\omega(h) \int_0^{\frac{a}{h}} B(t)\,(1+\beta') \left(\frac{\gamma t^2}{p^4} - \frac{4t^2}{p^6} \right) dt.$$

Pour que $\lim_{h=0} G$ soit finie il faut donc que

$$\lim_{h=0} \int_0^{\frac{a}{h}} B(t)\,(1+\beta')\,\gamma \frac{t^2\,dt}{p^4} = 4 \int_0^{\infty} B(t) \frac{t^2\,dt}{p^6}.$$

Or, le deuxième membre de cette égalité est fini (331). Pour que le premier membre soit fini, il faut que

$$\lim_{h=0} \gamma \text{ soit finie } = \gamma_0,$$

en supposant que $\frac{\alpha}{\beta}$ ne change pas de signe une infinité de fois pour de petites valeurs de r,

(333) $$\therefore \lim_{r=0} \frac{\alpha}{\beta} = \gamma_0 = \text{une constante.}$$

D'où il suit qu'une condition nécessaire pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \mathrm{G}$ est que

(334) $$\mathrm{I} = \int_0^\infty \mathrm{B}(t)\left(\frac{\gamma_0 t^2}{p^4} - \frac{4t^2}{p^6}\right) dt = 0.$$

Lemme I.

(335) $$\int_0^\infty \left(\frac{\gamma_0}{p^4} - \frac{4}{p^6}\right) t^{3-\gamma_0}\, dt = 0, \qquad 0 < \gamma_0 < 4.$$

En effet, posons

$$\int_0^\infty \frac{\chi^{3-\gamma_0}}{(1+\chi^2)^2}\, d\chi = \mathrm{Z}, \qquad \gamma_0 < 4,$$

$$\chi = \frac{t}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\therefore \bar{\mathrm{I}} = \int_0^\infty \frac{t^{3-\gamma_0}\, dt}{(\alpha + t^2)^2} = \alpha^{-\frac{\gamma_0}{2}} \mathrm{Z}.$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\frac{d\bar{\mathrm{I}}}{d\alpha} = \int_0^\infty \frac{t^{3-\gamma_0}\, dt}{(\alpha + t^2)^3} = \frac{\gamma_0}{4} \alpha^{-\frac{\gamma_0}{2}-1} \mathrm{Z}.$$

En posant $\alpha = 1$ nous retrouverons l'identité (335).

Lemme II. — *Soit*

(336) $$\mathrm{F} = \int_0^\infty \Omega(t)\left(\frac{\gamma_0}{p^4} - \frac{4}{p^6}\right) t^{3-\gamma_0}\, dt.$$

Si $\Omega(t)$ *est une fonction toujours croissante*, $\mathrm{F} > 0$, *et si* $\Omega(t)$ *est une fonction toujours décroissante*, $\mathrm{F} < 0$.

En effet, nous aurons (335)

$$\int_0^\varkappa \left(\frac{\gamma_0}{p^4} - \frac{4}{p^6}\right) t^{3-\gamma_0}\, dt = \int_\varkappa^\infty \left(\frac{4}{p^6} - \frac{\gamma_0}{p^4}\right) dt, \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{4-\gamma_0}{\gamma_0}};$$

par suite, si Ω est une fonction croissante,

$$\int_0^{\varkappa} \Omega(t)\left(\frac{\gamma_0}{p^4}-\frac{4}{p^6}\right)t^{3-\gamma_0}\,dt > \int_{\varkappa}^{\infty} \Omega(t)\left(\frac{4}{p^6}-\frac{\gamma_0}{p^4}\right)t^{3-\gamma_0}\,dt,$$

donc, etc.

Nous écrirons maintenant l'intégrale I (334) de la manière suivante :

$$(337)\qquad I=\int_0^{\infty}\frac{B(t)}{t^{1-\gamma_0}}\left(\frac{\gamma_0}{p^4}-\frac{4}{p^6}\right)t^{3-\gamma_0}\,dt,$$

d'où il suit que $\dfrac{B(t)}{t^{1-\gamma_0}}$ n'est pas une fonction toujours croissante ou toujours décroissante. Si à partir d'une certaine valeur r_0 de r, la quantité β conserve toujours le même signe, soit $\beta > 0$, et va toujours en croissant, $B(t)$ est une fonction croissante ou une constante. Par suite, dans ce cas, nous tirons de l'égalité

$$I = 0$$

la conséquence que

$$(338)\qquad \frac{B(t)}{t^{1-\gamma_0}} = \text{une constante } \beta_0,$$

$$(339)\qquad \therefore\ \beta = \omega(h)\,t^{1-\gamma_0}\beta_0(1+\beta'),$$

$$\therefore\ \gamma = \gamma_0 - 1,$$

$$(340)\qquad \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{V(r)}{r^{\gamma_0-1}},\qquad V(ht) = m(h)(1+\beta'),\qquad \lim\limits_{h=0}\beta'(h,t)=0, \\ \therefore\ \beta_0\,\omega(h) = \dfrac{m(h)}{h^{\gamma_0-1}}. \end{array}\right.$$

La quantité G (332) se réduit maintenant à

$$(341)\qquad \left\{\begin{array}{l} G = \dfrac{4\,m(h)}{h^{\gamma_0-1}}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}}\beta'\left(\frac{\gamma_0+\alpha'+\dfrac{\alpha'}{\beta'}}{p^4}-\frac{4}{p^6}\right)t^{3-\gamma_0}\,dt, \\ \text{en posant} \\ \qquad \gamma=\gamma_0+\alpha',\qquad \lim\limits_{h=0}\alpha'=0. \end{array}\right.$$

Nous traiterons cette expression de G (341) de la même manière que l'autre (332) en posant

$$(342)\qquad \left\{\begin{array}{l} \beta' = \omega_1(h)\,B_1(t)(1+\beta''),\qquad \lim\limits_{h=0}\omega_1(h)=\lim\limits_{h=0}\beta''=0, \\ \alpha'=\gamma'\beta'. \end{array}\right.$$

Si α' et β ne changent pas de signe une infinité de fois pour de petites valeurs de h, nous trouverons qu'il faut choisir l'angle u de manière que

$$(343)\qquad \lim_{h=0}\frac{\alpha'}{\beta'} = \text{une quantité finie} = -\gamma_1.$$

Si, de plus, $\lim\limits_{h=0}\dfrac{m\omega_1}{h^{\gamma_0-1}}$ est finie, $\lim\limits_{h=0} G$ est finie. Dans le cas où m est une constante, nous trouverons comme précédemment que γ_1 est une constante indépendante de t. Nous trouverons que nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soient* $\lim\limits_{r=0} r\overline{\varphi}^2$ *finie et*

$$(344)\qquad \beta = \frac{\beta_0}{r^{\gamma_0-1}}(1+\beta_1 r^{\gamma_1}+\ldots+\beta_{n-1}r^{\gamma_{n-1}}) + \beta_n(r),$$

γ_0, β_0, β_k et γ_k *étant des constantes;* $\gamma_k > \gamma_{k-1} > 0$, $2 > \gamma_0 \geq 1$ *pour* $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $\lim\limits_{r=0}\beta_n(r)$ *finie. Si nous choisissons* u *de manière que*

$$(345)\qquad \alpha = \frac{\beta_0}{r^{\gamma_0-1}}\left[\gamma_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\beta_k(\gamma_0-\gamma_k)\,r^{\gamma_k}\right] + \alpha_n(r), \qquad \lim_{r=0}\alpha_n(r)\ \textit{finie},$$

$$(346)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h_+}}{\partial N'} - \frac{\partial W_{h_-}}{\partial N'}\right) = \textit{une quantité finie},$$

et cette limite est égale à zéro, si $\lim\limits_{r=0} r\overline{\varphi}^2 = 0$ *et* $\lim\limits_{r=0}\alpha_n = \lim\limits_{r=0}\beta_n$.

$\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial W_h}{\partial N'}$. — Nous pourrons écrire (321)

$$(347)\qquad f = \frac{2c}{\rho^3} - \frac{c}{\rho^2} + \frac{1}{2}(f_+ - f_-) + 2uu_2\left(\frac{t^2}{\rho^3} - \frac{4t^2}{\rho^5}\right) + \frac{u^2}{\rho^3}g,$$

$\lim\limits_{t=0} g$ et $\lim\limits_{t=\infty} g$ finies; d'où le théorème :

Théorème. — *Si* $\lim\limits_{r=0}\dfrac{u^2}{r}$, $\lim\limits_{r=0}\dfrac{uu_2}{r}$ et $\lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial W_{h_+}}{\partial N'} - \dfrac{\partial W_{h_-}}{\partial N'}\right)$ *sont finies, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial W_h}{\partial N'}$ *est* *que*

$$
(348)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\lim_{h=0} \mathrm{I} \textit{ soit finie,}\\
&\textit{où}\\
&\mathrm{I} = \frac{1}{h}\int_0^{\frac{a}{h}} \rho\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^4}\right)dt - \sum 2\int_h^a \sigma u u_2 \frac{dr}{r^2},\\
&\rho = \sum \sigma c.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarque II. — Soit

$$
\rho = \rho_0 + r\bar{\rho}, \qquad \lim_{r=0}(r\bar{\rho}) = 0, \qquad \rho_0 = \text{const.}
$$

Si $\lim\limits_{r=0} \bar{\rho}$ est finie, la condition (348) peut être remplacée par celle-ci :

$$
(349)\qquad W_{NN} = \lim_{h=0} \sum \int_h^a [\sigma(2uu_2 - c) + \sigma_0] \frac{dr}{r^2} = \text{une quantité finie.}
$$

Si de plus $\int_0^a u^2 \frac{dr}{r^2}$ est finie, ρ peut être remplacée par $\sum \sigma$, et la condition (350) par

$$
(349^*)\qquad \int_0^a (\rho - \rho_0)\frac{dr}{r^2} = \text{une quantité finie.}
$$

Remarque III. — Des considérations analogues peuvent se faire sur la dérivée $\frac{\partial W}{\partial N'}$. Posons

$$
(350)\qquad \Delta' = \frac{1}{h}[W_{h_+} - W_+^{(h)}] - \frac{1}{h}[W^{(h)} - W_{h_-}].
$$

Nous aurons (280)

$$
(351)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&W_{h_+} = -\sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(tu_2 - c)\frac{dt}{q^2}, \qquad q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1},\\
&W_{h_-} = -\sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(tu_2 + c)\frac{dt}{q_-}, \qquad q_- = \sqrt{t^2 + 2tu + 1},\\
&u = -\sin\varphi', \qquad u_2 = -\sin(\varphi' - n), \qquad c = \cos n,\\
&\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_0 - n_0 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

et

$$(352)\quad \begin{cases} \therefore \dfrac{tu_2 - c}{q^2} + \dfrac{tu_2 + c}{q_-} = \dfrac{2tu_2}{p^2} - \dfrac{4tuc}{p^4} + \dfrac{u^2}{p^3}\mathrm{P}, \\ p = \sqrt{t^2+1}, \qquad \lim\limits_{t=0}\mathrm{P} \quad \text{et} \quad \lim\limits_{t=\infty}\mathrm{P} \text{ finies.} \end{cases}$$

Posons

$$(353)\qquad \sum \sigma u_2 = \alpha r, \qquad -\sum \sigma uc = \beta r,$$

$$(354)\quad \begin{cases} \therefore \dfrac{1}{h}(\mathrm{W}_{h_+} + \mathrm{W}_{h_-}) = \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2, \\ \mathrm{G}_1 = -2\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \left(\dfrac{\alpha}{p^2} + \dfrac{2\beta}{p^4}\right) t^2\, dt, \\ \mathrm{G}_2 = -\displaystyle\sum \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma \dfrac{u^2}{r} \mathrm{P} \dfrac{t\, dt}{p^3}. \end{cases}$$

De même nous aurons (275)

$$(355)\quad \begin{cases} \mathrm{W}_+^{(h')} = \displaystyle\sum \int_0^{\frac{a}{h'}} \sigma' \log \dfrac{q}{t}\, dt, \\ \mathrm{W}_-^{(h')} = \displaystyle\sum \int_0^{\frac{a}{h'}} \log \dfrac{t}{q_-}\, dt, \\ \log \dfrac{q}{t} + \log \dfrac{t}{q_-} = -\dfrac{2tu'_2}{p^2} + \dfrac{u'^3}{p^3}\mathrm{P}', \end{cases}$$

$\lim\limits_{t=0}\mathrm{P}'$ et $\lim\limits_{t=\infty}\mathrm{P}'$ finies,

$$\therefore \mathrm{W}_+^{(h')} + \mathrm{W}_-^{(h')} = -2\sum \int_0^1 \sigma' u'_1 \frac{t}{p^2}\, dt - 2\sum \int_1^{\frac{a}{h'}} \sigma' u'_2 \left(\frac{t}{p^2} - \frac{1}{t}\right) dt$$
$$- 2\sum \int_{h'}^{a} \sigma u_2 \frac{dr}{r} + \sum \int_0^{\frac{a}{h'}} \frac{u'^3}{p^3} \mathrm{P}'\, dt,$$

σ' et u'_2 étant égaux à σ et u_2 en y posant $r = h't$,

$$(356)\qquad \therefore \lim_{h'=0} [\mathrm{W}_+^{(h')} + \mathrm{W}_-^{(h')}] = -2\int_0^a \alpha\, dr;$$

et

$$(357)\qquad \therefore \Delta = \lim_{h=0} \Delta' = -2\int_0^1 \alpha \frac{t^2\,dt}{p^2} - 2\int_1^{\frac{a}{h}} \alpha\left(\frac{t^2}{p^2} - 1\right) dt$$
$$- 4\int_0^{\frac{a}{h}} \beta \frac{t^2\,dt}{p^4} + \frac{2}{h}\int_0^h \alpha\,dr + G_2.$$

En supposant que les deux membres de l'égalité (355) soient finies, nous trouverons

$$(358)\qquad \Delta = 2\int_0^{\frac{a}{h}} \left(\frac{\alpha}{p^2} - \frac{2\beta t^2}{p^4}\right) dt + G_2,$$

d'où le théorème :

Théorème. — *Si* $\lim\limits_{r=0} \frac{u_2^2}{r}$ *est finie, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0} \Delta$ *est que*

$$(359)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} I_1 \text{ soit finie,} \\ \text{où} \\ I_1 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \left(\frac{\alpha}{p^2} - \frac{2\beta t^2}{p^4}\right) dt. \end{cases}$$

Remarque IV. — L'intégrale I_1 (359) peut être traitée de la même manière que la quantité G(332), en observant que

$$(360)\qquad \int_0^\infty \left(\frac{\gamma}{p^2} - \frac{2t^2}{p^4}\right) t^{\gamma-1}\,dt = 0,$$

γ étant une constante.

Pour le potentiel newtonien j'ai établi des résultats analogues ([1]). Quelques-uns des résultats de ce Mémoire ont été obtenus pour la première fois par M. Bromwich ([2]), savoir la première des formules (23),

---

([1]) *Les dérivées premières et secondes du potentiel* (*Acta math.*, t. XXXI, p. 127-332; Upsala, 1907).

([2]) T.-J. I'A. Bromwich, *Theorems on the logarithmic potential* (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. III, p. 345-370; London, 1905).

celles des formules du paragraphe **6** qui se rapportent à $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}$ et celles du paragraphe **9**, en employant les méthodes que j'avais données pour le potentiel newtonien ([1]).

TABLE DES INTÉGRALES.

$$q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \qquad u = \cos v, \qquad 2\pi > v > 0,$$

$$\int \frac{dv}{q^2} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} \operatorname{tang}^{-1}\left(\frac{t+1}{t-1} \operatorname{tang} \frac{v}{2}\right),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dv}{q^2} = \frac{2\pi}{|t^2 - 1|},$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{q^2} = \frac{\pi - v}{\sin v},$$

$$I = \int \frac{dt}{q^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{tang}^{-1} \frac{t-u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\int \log q \, dt = -t + (t-u)\log q + (1-u^2) I.$$

$$\int \frac{t\,dt}{q^2} = \log q + u I.$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{q^2} = t + 2u \log q + (2u^2 - 1) I.$$

$$\int \frac{dt}{q^4} = \frac{t-u}{2(1-u^2)q^2} + \frac{1}{2(1-u^2)} I,$$

$$\int \frac{t\,dt}{q^4} = \frac{tu-1}{2(1-u^2)q^2} + \frac{u}{2(1-u^2)} I,$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{q^4} = \frac{t(2u^2-1)-u}{2(1-u^2)q^2} + \frac{1}{2(1-u^2)} I,$$

$$\int \frac{t^3\,dt}{q^4} = \log q + \frac{tu(4u^2-3) + 1 - 2u^2}{2(1-u^2)q^2} + \frac{u(5-2u^2)}{2(1-u^2)} I.$$

([1]) *K. Vet. Akad. Öfvers.*, Bd. LVII, p. 225-237 et 867-874; Stockholm, 1900.

$$\int \frac{dt}{q^6} = \frac{t-u}{\alpha} + \frac{3(t-u)}{\beta} + \frac{3}{\gamma}\,\mathrm{I},$$

$$\int \frac{t\,dt}{q^6} = \frac{tu-1}{\alpha} + \frac{3u(t-u)}{\beta} + \frac{3u}{\gamma}\,\mathrm{I},$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{q^6} = \frac{t(2u^2-1)-u}{\alpha} + \frac{(2u^2+1)(t-u)}{\beta} + \frac{2u^2+1}{\gamma}\,\mathrm{I},$$

$$\int \frac{t^3\,dt}{q^6} = \frac{tu(4u^2-3)+1-2u^2}{\alpha} + \frac{3tu-4+5u^2-4u^4}{\beta} + \frac{3u}{\gamma}\,\mathrm{I},$$

$$\int \frac{t^4\,dt}{q^6} = \frac{t(1-8u^2+8u^4)+3u-4u^3}{\alpha}$$

$$+ \frac{t(-5+16u^2-8u^4)-u(11-16u^2+8u^4)}{\beta} + \frac{3}{\gamma}\,\mathrm{I},$$

$$\int \frac{t^5\,dt}{q^6} = \log t + \frac{tu(5-20u^2+16u^4)-1+8u^2-8u^4}{\alpha}$$

$$+ \frac{tu(-25+60u^2-32u^4)+8-39u^2+44u^4-16u^6}{\beta}$$

$$+ \frac{u(15-20u^2+8u^4)}{\gamma}\,\mathrm{I};$$

$$\alpha \equiv 4(1-u^2)q^4, \qquad \beta \equiv 8(1-u^2)^2 q^2, \qquad \gamma = 8(1-u^2)^2.$$

Sur certains systèmes d'équations différentielles [1];

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

Introduction.

Je m'occupe, dans le travail qui suit, de systèmes d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_1}{X'_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X'_n} = dt,$$

où

$$X'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_i) + Y_i = X_i + Y_i,$$

$\varphi_i = X_i$ étant un polynome homogène de degré $p > 1$, Y_i une fonction de $x_1, \ldots, x_i$ dont les termes sont tous de degré $> p$, par exemple un polynome, une série de Maclaurin dont tous les termes sont de degré $> p$, etc. Je définis des cas étendus où, pour $t \geqq 0$, les solutions réelles, de valeurs initiales assez voisines de l'origine $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (cette restriction est inutile quand les Y_i sont nuls) sont de la forme

$$x_1 = \ldots = x_i = 0, \qquad x_j = (\rho_j + \varepsilon_j)(a + t)^{\frac{1}{1-p}}$$

($j = i + 1, \ldots, n$; a paramètre arbitraire $\geqq 0$, ρ_j constante, $\lim \varepsilon_j = 0$ pour $t = +\infty$). Ainsi, lorsque p est impair, ceci a lieu quand le coef-

(1) Le présent Mémoire a été résumé dans une Communication à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, 13 juillet 1908). Sa lecture n'exige que des connaissances mathématiques générales.

ficient de x_i^p dans φ_i est <0 quel que soit i; alors, si les Y_i sont holomorphes dans le domaine de l'origine, le calcul des ε_i peut s'effectuer, en général, quand leurs valeurs absolues sont assez petites, grâce à une théorie de M. H. Poincaré (et à ses compléments par divers auteurs). Quand p est pair, on a un résultat analogue pour les solutions $x_i \geqq 0$, sous certaines conditions complémentaires relatives aux X_i. Les ρ_j sont racines d'un système d'équations qui ne dépend que de p et des coefficients des X_i.

Il y a des extensions à des autres cas, par exemple à celui où X_i est remplacé par une expression $\frac{\varphi_i + Y_i}{x_i^{p'}}$.

Enfin, ces considérations, et d'autres analogues, comportent des applications dans l'étude du régime des systèmes de n réservoirs, en permettant d'établir, dans des cas très généraux, l'existence d'un régime asymptotique unique si ces réservoirs ne sont pas alimentés du dehors, ou d'un ou plusieurs régimes permanents limites, s'ils sont alimentés par des débits permanents. Inversement, l'étude des systèmes de réservoirs pourra fournir des systèmes d'équations différentielles, cas particuliers de systèmes plus généraux, et dont on soupçonnera parfois assez nettement certaines propriétés pour qu'on puisse tenter de les établir. En fait, la plus grande partie de mon travail est une extension de résultats beaucoup plus restreints que j'ai fait connaître antérieurement [1].

Je suis conduit dans mon Mémoire à envisager certains cas du sujet d'études suivant : on sait que les solutions $x_1, \ldots, x_n$ (satisfaisant à certaines conditions) d'un système d'équations différentielles entre $x_1, \ldots, x_n$ et t tendent vers l'origine $x_1 = \ldots = x_n = 0$ quand $\frac{1}{t}$ tend vers 0 pour $t \geqq 0$, mais on ne sait pas intégrer le système dans le domaine de l'origine : calculer en fonction de $\frac{1}{t}$ les valeurs principales des infiniment petits $x_1, \ldots, x_n$ quand $\frac{1}{t}$ tend vers zéro.

Il est à peine besoin de faire remarquer que mon Mémoire fournit

(1) *Comptes rendus*, 13 mars 1905; *Bull. Soc. math.*, t. XXXIII, 1905, p. 129; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1906.

Pour des résultats ultérieurs, consulter *Comptes rendus*, 23 novembre 1908, 12 et 19 juillet 1909; *Journ. École Pol.*, 1909.

une contribution à l'étude des courbes réelles définies par des équations différentielles, et, par suite, se rattache à une catégorie d'importants travaux de MM. H. Poincaré, Liapounoff, Hadamard, Painlevé, etc.

II.

Solutions simples ou déterminantes d'un certain système d'équations différentielles.

Soit le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{1}$$

où $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont des fonctions homogènes de degré $p > 0$, entier ou non, en $x_1, \ldots, x_n$. Je pose, a, m et ρ_i étant des constantes,

$$x_i = \rho_i (a+t)^m, \qquad dx_i = m\,\rho_i (a+t)^{m-1}\,dt = \frac{m\,x_i\,dt}{a+t}. \tag{2}$$

Par substitution, (1) donne, si $X_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$X_i = (a+t)^{mp}\,\varphi_i(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n), \tag{3}$$

où $\varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ est homogène et de degré p en $\rho_1, \ldots, \rho_n$, et

$$m\,\rho_i(a+t)^{m-1} = (a+t)^{mp}\,\varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_n).$$

On satisfait à cette relation en posant

$$m - 1 = mp, \qquad m = \frac{1}{1-p}, \qquad p \neq 1, \tag{4}$$

$$m\,\rho_i = \varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \frac{\rho_i}{1-p} \tag{5}$$

ou

$$m = \rho_1^{p-1}\,\frac{\rho_1}{\rho_i}\,\varphi_i\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_n}{\rho_1}\right).$$

Les équations (5) déterminent les systèmes de valeurs des ρ_i acceptables. On obtient ainsi, dans le cas général, une série de solutions de (1) dépendant d'un paramètre arbitraire a. Ces solutions seront dites *solutions simples* ou *déterminantes* de (1).

Je suppose dès lors *p entier > 1*, et je n'envisage que des solutions

$x_1, \ldots, x_n$, *t réelles;* $x_i = \rho_i(a+t)^m$ est réel ainsi que sa dérivée $\frac{dx_i}{dt} = \frac{mx_i}{a+t}$. Donc, t étant réel, si $t = 0$ est la valeur initiale de t (on peut supposer que t est le temps), a et $a+t$ sont réels; $(a+t)^m$ est de la forme

$$|(a+t)^m|\,\theta = [\mathrm{mod}(a+t)^m]\,\theta,$$

où θ est une racine quelconque de $\theta^{2p-2} = 1$, telle qu'on a $\theta^{p-1} = +1$ quand $a \geqq 0$, $\theta^{p-1} = -1$ quand $a < 0$. De plus, pour le système $\rho_1, \ldots, \rho_n$ considéré, $\frac{\rho_i}{\rho_j} = \frac{x_i}{x_j}$, $\rho_i\theta$, ρ_i^{p-1} sont évidemment réels, et θ a même valeur quel que soit i.

Inversement, soit $\rho_1, \ldots, \rho_n$ un système de solutions des équations (5) tel que $\frac{\rho_i}{\rho_j}$ et $\rho_i\theta$ (ou ρ_i^{p-1}) soient réels pour i et j égaux à $1, 2, \ldots, n$: $x_i = \rho_i(a+t)^m$ est une solution réelle de (1) si $(a+t)^m = |(a+t)^m|\,\theta$.

On a

$$\left(\frac{x_i}{\rho_i}\right)^{p-1} = (a+t)^{-1};$$

si t croît à partir de zéro, les x_i tendent vers zéro quand t croît indéfiniment, ou croissent indéfiniment en valeur absolue quand t tend vers $-a$, suivant que a est positif ou négatif. Les solutions du premier type seront dites *stables*, celles du second *instables*.

Soient $\rho_1, \ldots, \rho_n$ un système de solutions de (5), et θ_1 une racine $(p-1)^{\text{ième}}$ de l'unité; d'après (5), $\rho_1\theta_1, \ldots, \rho_n\theta_1$ est aussi un système de solutions.

Ceci posé [1] :

1° *Soient p impair, $p-1$ pair.* — On a $x_i^{p-1} > 0$; ρ_i^{p-1} est positif si a est positif, négatif si a est négatif. La trajectoire se compose d'une des demi-droites $\frac{x_i}{x_1} = \frac{\rho_i}{\rho_1}$ passant par l'origine; si $x_i = \rho_i(a+t)^m$ (où $i = 1, 2, \ldots, n$) est solution, il en est de même de $x_i = -\rho_i(a+t)^m$; à la solution $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de (5) correspondent ainsi deux solutions de (1) dépendant d'un paramètre arbitraire a à la fois positif ou négatif pour

(1) J'emploie dans mon Mémoire la terminologie, facile et suggestive, de la Géométrie à n dimensions.

les deux; si une demi-droite est trajectoire, il en est de même de la demi-droite opposée.

Les solutions (2) ne peuvent être toutes stables que quand (5) n'a aucun système de solutions telles que $\frac{\rho_i}{\rho_j}$ soit réel et $\rho_i^{p-1} < 0$. En admettant qu'il n'y ait pas de solutions instables, c'est-à-dire que l'on ait toujours $a > 0$, on peut se borner à envisager les systèmes $\rho_1, \ldots, \rho_n$ réels; en effet, si $a > 0$, $\frac{\rho_i}{\rho_j}$ est réel et $\rho_i^{p-1} > 0$: parmi les $p-1$ systèmes $\rho_1\theta_1, \ldots, \rho_n\theta_1$, il y en a un réel; c'est celui-là que je désigne par $\rho_1, \ldots, \rho_n$; alors la solution $\rho_1\theta'_1, \ldots, \rho_n\theta'_1$, avec $\theta_1'^{p-1} = 1$ et $\rho_1\theta'_1(a+t)^m$ réel, est telle que

$$(a+t)^m = \pm |(a+t)^m| \theta_1'^{-1},$$

et donne

$$x_i = \pm \rho_i |(a+t)^m|,$$

c'est-à-dire les mêmes solutions que le système $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

D'autre part, quand $a < 0$, $\rho_i\theta$ étant réel avec $\theta^{p-1} = -1$, on a

$$x_i^{p-1} = \rho_i^{p-1}(a+t)^{-1} = \frac{-\rho_i^{p-1}}{-(a+t)} = \frac{(\rho_i\theta)^{p-1}}{-(a+t)},$$
$$x_i = \rho_i\theta|(-a-t)^m|,$$

où

$$\rho_i\theta = \rho'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est une solution réelle du système

$$-m = \rho_1'^{p-1}\frac{\rho'_1}{\rho'_i}\varphi_i\left(1, \frac{\rho'_2}{\rho'_1}, \ldots, \frac{\rho'_n}{\rho'_1}\right).$$

2° *Soient p pair, $p-1$ impair.* — ρ_i^{p-1} étant réel, positif ou négatif, il y a toujours, que a soit positif ou négatif, un des systèmes $\rho_1\theta_1, \ldots, \rho_n\theta_1$ qui est réel : je le désigne par $\rho_1, \ldots, \rho_n$. On a la solution correspondante

$$x_i = \pm \rho_i |(a+t)^m|,$$

où le signe à prendre est celui de a.

Les solutions $\rho_i\theta'_1(\theta'_1 \neq 1, \theta_1'^{p-1} = 1)$ peuvent être laissées de côté, car elles donnent la même valeur pour x_i. Mais, ici, x_i^{p-1} est du signe de x_i; en faisant varier le signe des valeurs initiales pour les x_i, on obtient, avec la solution $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de (5), deux solutions simples de (1), l'une stable pour laquelle $a \geq 0$, l'autre instable pour laquelle $a < 0$. Les deux trajectoires correspondantes sont deux demi-droites opposées $\frac{x_i}{x_1} = \frac{\rho_i}{\rho_1}$.

Toutes ces conclusions subsistent, que p soit pair ou impair, si quelques-unes des quantités $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont nulles.

En résumé :

LEMME. — *Les solutions réelles $x_i = \rho_i(a+t)^m$ de (1) correspondent aux solutions de (5) telles que $\frac{\rho_i}{\rho_j}(i \neq j)$ et ρ_i^{p-1} sont réels. Ce sont, par définition, les solutions simples (ou déterminantes) réelles de (1).*

Quand p est impair, une pareille solution simple est stable si les ρ_i^{p-1} correspondants, qui sont tous de même signe, sont positifs, et alors on peut prendre $\rho_1, \ldots, \rho_n$ réels; elle est instable dans le cas contraire. Les trajectoires correspondantes sont formées de demi-droites deux à deux opposées passant par l'origine; mais les solutions correspondant à deux demi-droites opposées sont à la fois stables ou instables.

Quand p est pair, une pareille solution simple peut toujours être choisie de façon que les ρ_i soient réels. Dans cette hypothèse, les paramètres $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont ceux d'une demi-droite issue de l'origine et qui est une trajectoire stable $\left(a > 0, \frac{x_i}{\rho_i} > 0\right)$ et de la demi-droite opposée qui est une trajectoire instable $\left(a < 0, \frac{x_i}{\rho_i} < 0\right)$.

On conclut facilement de là les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces solutions réelles simples soient toutes stables dans un angle solide ayant pour sommet l'origine. En particulier, quand cet angle comprend tout l'espace, ces solutions ne peuvent être toutes stables :

1° Lorsque p est pair, que si les équations (5) en ρ_i n'ont pas de solution réelle autre que $\rho_1 = \ldots = \rho_n = 0$; il n'y a pas de solution simple réelle autre que $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

2° Lorsque p est impair, que si ces équations n'ont aucun système de solutions tel que les ρ_i^{p-1} soient tous négatifs, avec $\frac{\rho_i}{\rho_j}$ réel (condition nécessaire et suffisante).

Ces conditions sont d'autre part nécessaires pour que la solution générale de (1) soit stable dans le domaine de l'origine. *J'appelle ici, et dans la suite, solution stable d'un système d'équations différentielles dans ce domaine une solution qui, pour des valeurs initiales assez petites des* $|x_i|$, *est telle que les* x_i *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{t}$. *Plus généralement, je dirai que la solution* x_i *est stable pour l'origine quand les* x_i *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{t}$.

Les solutions particulières (2) que l'on vient de trouver jouent, comme on va le voir, un rôle important dans l'étude de la stabilité des solutions de certains systèmes d'équations différentielles de la forme (1) ou analogues, au voisinage de l'origine.

III.

Système d'équations différentielles plus général à certains égards.

J'envisage le système

$$(6) \qquad dt = \frac{dx_1}{X'_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X'_n},$$

où X'_i ne dépend que de $x_1, \ldots, x_i$, et

$$X'_i = X_i + Y_i,$$

$X_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_i)$ étant un polynome homogène en $x_1, \ldots, x_i$, de degré entier $p > 1$, Y_i une fonction des mêmes quantités qui sera d'ordre infinitésimal supérieur à p quand $x_1, \ldots, x_i$ sont infiniment petits du premier ordre (par exemple un polynome ou une série de Maclaurin absolument convergente, dont tout terme est de degré $> p$, un terme de la forme $A x_j^{p+\frac{1}{2}} \log x_j$ (A constante, $x_j > 0$), etc.

Je considère en même temps que le système (6) le système

$$(7) \qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Les équations (5) deviennent pour le système (7)

$$m\rho_i = \frac{\rho_i}{1-p} = \varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_i), \tag{8}$$

ou

$$\frac{1}{1-p} = \rho_1^{p-1}\frac{\rho_1}{\rho_i}\varphi_i\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_i}{\rho_1}\right).$$

Une des solutions s'obtiendra en posant $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_j = 0$, ce qui rend identiques les j premières équations (8), les autres déterminant $\rho_{j+1}, \ldots, \rho_n$. Le système des $n-j$ dernières équations n'est d'ailleurs autre que celui des équations (5) correspondant au système analogue à (7)

$$dt = \frac{dx_{j+1}}{X_{j+1}} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{9}$$

où

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_j = 0,$$

c'est-à-dire au système différentiel déduit de (7) en y faisant

$$x_1 = \ldots = x_j = 0.$$

Les systèmes (6), (7) et (9) ont cette propriété remarquable que l'on peut y considérer séparément le système obtenu en y négligeant les λ dernières équations. En particulier, on peut déterminer la première fonction x_1 par une quadrature, la seconde x_2 par une équation du premier ordre, la troisième x_3 par une équation du premier ordre, etc.

IV.

Cas où p est impair > 1.

Je vais établir le résultat suivant.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les solutions réelles du système* (6), *dont les positions initiales pour $t=0$ sont assez voisines de l'origine $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (c'est-à-dire les solutions pour lesquelles $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ a une valeur initiale assez petite), soient toutes stables, c'est en général que les solutions déterminantes de* (7) *soient toutes stables.*

Si les solutions réelles de (6) *sont toutes stables, elles sont toutes d'une des formes*

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1 = \ldots = x_i = 0, \qquad x_j = (\rho_j + \varepsilon_j)(a+t)^{\frac{1}{1-p}}, \\ j = i+1,\quad i+2,\quad \ldots,\quad n; \qquad a > 0, \qquad \rho_{i+1} \neq 0, \end{cases}$$

avec $\lim \varepsilon_j = 0$ *pour* $t = +\infty$;

$$x_1 = \ldots = x_i = 0, \qquad x_j = \rho_j (a+t)^{\frac{1}{1-p}}$$

est alors une solution simple quelconque de (7) (¹).

Cet énoncé est vrai en général, c'est-à-dire, pour préciser, au cas où le coefficient $-\beta_i$ de x_i^p dans X_i est supposé $\neq 0$ quand $i = 1, 2, \ldots,$ et n, hypothèse que l'on fait dès à présent.

Alors, comme on le verra, *la condition nécessaire et suffisante pour que les solutions déterminantes réelles de* (7) *soient toutes stables, c'est que* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *soient tous* > 0. Dans le cas particulier où les Y_i sont tous nuls, c'est-à-dire où (6) et (7) coïncident, le théorème reste vrai même si la valeur initiale de $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ est absolument quelconque. On pourra le vérifier au cours de la démonstration.

Enfin, dans le cas un peu plus général où les Y_i sont nuls, mais où les X_i sont des polynomes homogènes de degré p en $x_1, \ldots, x_i$, dont les coefficients A sont, dans un domaine sphérique D ayant son centre à l'origine $x_1 = \ldots = x_n = 0$, *non plus constants, mais variables,* et de la forme $A'(1+\varepsilon)$, les A' étant constants et les $1+\varepsilon$ restant compris entre deux limites fixes > 0 assez rapprochées, avec $\varepsilon = 0$ à l'origine $x_k = 0$ (²), le théorème est encore vrai, et, en général, le domaine Δ des valeurs initiales admissibles est d'autant plus étendu que D l'est. Si D comprend tout l'espace, il en est de même de Δ.

Soient donc $\beta_1, \beta_2, \ldots$ et $\beta_n \neq 0$.

(¹) L'origine est dans ce cas, pour les trajectoires, un *nœud,* d'après la terminologie de M. Poincaré (*voir* Picard, *Analyse,* t. III, 1896, p. 200-207, et les Mémoires de M. Poincaré qui y sont cités).

(²) Les ε sont fonctions de $x_1, \ldots, x_i$, et même, si l'on veut, de t, pourvu qu'ils tendent uniformément vers zéro avec $x_1, \ldots, x_i$, quel que soit t. Ce sont alors les A' qui sont les coefficients des φ_i.

Cas où $n = 1$. — Le système (7) se réduit à

(11) $$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_1}{-\beta_1 x_1^p}, \qquad \beta_1 \neq 0;$$

on a

$$x_1 = \rho_1 (a+t)^{\frac{1}{1-p}}, \qquad -\beta_1 \rho_1^p (a+t)^{\frac{p}{1-p}} = \frac{\rho_1}{1-p}(a+t)^{\frac{1}{1-p}-1},$$

(12) $$\beta_1 (p-1) \rho_1^p = \rho_1, \qquad x_1^{1-p} = \beta_1 (p-1)(a+t).$$

Quand ρ_1 est $\neq 0$, la condition $a \geqq 0$ exige (pour $t = 0$) $\beta_1 > 0$, $\rho_1^{p-1} > 0$, et réciproquement : la solution de (11) autre que $x_1 = 0$ est stable. Au contraire, quand on a encore $\rho_1 \neq 0$, la condition $a < 0$ exige (pour $t = 0$) $\beta_1 < 0$, $\rho_1^{p-1} < 0$, et réciproquement : la solution de (11) autre que $x_1 = 0$ est instable.

Quand $\beta_1 > 0$, la solution de (11) autre que $x_1 = 0$ s'obtient, comme on l'a vu, en prenant pour ρ_1 les valeurs réelles

(12 *bis*) $$\rho_1 = \pm \left| [\beta_1 (p-1)]^{\frac{1}{1-p}} \right|.$$

Le système (6) se réduit à

(13) $$dt = \frac{dx_1}{X'_1}, \qquad X'_1 = -\beta_1 x_1^p + Z_1 x_1^{p+\delta},$$

où l'on peut prendre δ fixe > 0 et $|Z_1|$ limité supérieurement lorsque $|x_1|$ reste assez petit.

Ceci posé, j'établis le théorème pour $n = 1$. Je dis que les solutions de (13) ne sont pas toutes stables si celles de (11) ne le sont pas toutes, c'est-à-dire si $\beta_1 < 0$. En effet, dans ce cas, pour une valeur de x_1 de module assez petit, X'_1 et $\frac{dx_1}{dt}$ sont du signe de x_1^p, c'est-à-dire que $|x_1|$ croît : x_1 ne peut donc tendre vers zéro.

Au contraire, je dis que les solutions de (13), avec $|x_1^0|$ (valeur initiale de x_1 pour $t = 0$) assez petit [1], sont toutes stables si celles de (11) le sont, c'est-à-dire si $\beta_1 > 0$. On a ou bien $x_1 = 0$, ou bien

(14) $$x_1 = (\rho_1 + \varepsilon_1)(a+t)^{\frac{1}{1-p}}, \qquad a > 0, \qquad \rho_1 \neq 0,$$

---

[1] La restriction est inutile si $X'_1 = -\beta_1 x_1^p (1 + \zeta'_1)$, où $1 + \zeta'_1$ reste compris entre deux limites fixes > 0, dans le domaine D, renfermant l'origine, et où l'on

ε_1 tendant vers zéro quand t croît indéfiniment, et $(a+t)^{\frac{1}{1-p}}$ étant réel et positif.

En effet, je donne à x_1 une valeur initiale $|x_1^0| \leqq \eta$, où η est assez petit : x_1 et $\frac{dx_1}{dt}$ sont de signes contraires d'après (13), puisque $\beta_1 > 0$; $|x_1|$ décroît et reste $\leqq \eta$. Si $x_1^0 = 0$, x_1 reste nul. Soit $x_1^0 \neq 0$; la solution peut toujours se mettre sous la forme (14), ε_1 étant convenablement choisi, et x_1 conserve le même signe. Je substitue dans (13) la valeur (14) ; on a

$$\frac{1}{x_1}\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\rho_1+\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{1}{1-p}\frac{1}{a+t} = -\frac{\beta_1(\rho_1+\varepsilon_1)^{p-1}}{a+t}(1+\eta_1),$$

où

$$\eta_1 = -\frac{Z_1 x_1^{\delta}}{\beta_1}, \qquad |\eta_1| < \lambda\eta^{\delta} \qquad (\lambda \text{ constante}),$$

et

$$(a+t)\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\beta_1(\rho_1+\varepsilon_1)^p(1+\eta_1) + \frac{\rho_1+\varepsilon_1}{p-1}$$
$$= -\beta_1\rho_1^p(1+\eta_1) - p\beta_1\rho_1^{p-1}\varepsilon_1(1+\eta_1) + \frac{\rho_1+\varepsilon_1}{p-1} - \varepsilon_1^2\lambda_1,$$

où $|\lambda_1|$ reste fini quand ε_1 reste fini. D'après (12),

$$\beta_1\rho_1^p = \frac{\rho_1}{p-1}, \qquad \beta_1\rho_1^{p-1} = \frac{1}{p-1},$$

en sorte que

$$(a+t)\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{\rho_1\eta_1}{p-1} - \frac{p}{p-1}\varepsilon_1\eta_1 - \varepsilon_1^2\lambda_1 - \varepsilon_1.$$

étudie x_1 ($\zeta_1' = 0$ à l'origine $x_1 = 0$). Alors

$$\frac{dx_1^{1-p}}{dt} = (p-1)\beta_1(1+\zeta_1),$$

et x_1 tend vers 0 avec $\frac{1}{t}$.

On raisonne comme ci-après, mais à partir du temps t_0, où $x = x_1^1$, $|x_1^1| \leqq \eta$, $x_1^1 = \rho_1(a'+t_0)^{\frac{1}{1-p}}$, avec a' positif ou non. Alors, grâce à la *Remarque* qui suit, on obtient encore la forme (14), avec une valeur arbitraire $a_1 \geqq 0$ de la constante a, forme applicable depuis $t = 0$, pourvu que ε_1 soit convenablement choisi quand t varie de 0 à t_0.

Je choisis alors $a \geqq 0$ et le signe de ρ_1 de façon que

$$x_1^0 = \rho_1 \left| a^{\frac{1}{1-p}} \right|;$$

la valeur initiale de ε_1 pour $t = 0$ est 0, en sorte que $|\varepsilon_1|$ va d'abord rester petit quand t croît à partir de 0; η étant assez petit,

$$\eta_2 = \frac{|\rho_1 \eta_1|}{p-1} < \frac{|\rho_1| \lambda \eta^{\delta}}{p-1},$$

et si $|\varepsilon_1|$, croissant à partir de 0, vient à être supérieur à $2\eta_2$, on aura

$$\left| \frac{p}{p-1} \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_1^2 \lambda_1 \right| < \frac{|\varepsilon_1|}{2};$$

$\dfrac{d\varepsilon_1}{dt}$ et ε_1 sont de signes contraires, en sorte que $|\varepsilon_1|$ décroît; $|\varepsilon_1|$ ne peut dépasser $2\eta_2$, et, par suite, reste limité en fonction de η; d'après (14), x_1 tend vers 0 avec $\dfrac{1}{t}$: *les solutions de* (13) *sont toutes stables. On voit en même temps que* ε_1 *tend vers* 0, puisque, à chaque instant, $|\varepsilon_1|$ ne peut dépasser $2\eta_2$, et que η_1 et η_2 tendent vers 0.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il convient de noter que, lorsque $|x_1^0| < \eta$, $|x_1|$ reste plus petit que η.

D'autre part, pour chaque solution, a semble dépendre de x_1^0; soit $a_0 \geqq 0$ tel que

$$x_1^0 = \rho_1 \left| a_0^{\frac{1}{1-p}} \right|, \qquad a_0 = \left(\frac{x_1^0}{\rho_1} \right)^{1-p};$$

on trouve en réalité

$$x_1 = (\rho_1 + \varepsilon_1)(a_0 + t)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Mais, si a_1 désigne un nombre arbitraire $\geqq 0$, on aura

$$(a_0 + t)^{\frac{1}{1-p}} = (a_1 + t)^{\frac{1}{1-p}} \left(\frac{a_1 + t}{a_0 + t} \right)^{\frac{1}{p-1}} = (a_1 + t)^{\frac{1}{1-p}} (1 + \varepsilon'_1),$$

$$(1 + \varepsilon'_1)^{p-1} = \frac{a_1 + t}{a_0 + t} = 1 + \frac{a_1 - a_0}{a_0 + t},$$

et ε'_1 tend vers o avec $\frac{1}{t}$; posant

$$(\rho_1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon'_1) = \rho_1 + \varepsilon''_1,$$

on a

$$x_1 = (\rho_1 + \varepsilon''_1)(a_1 + t)^{\frac{1}{1-p}},$$

où ε''_1 tend vers o avec $\frac{1}{t}$; autrement dit, toute solution telle que $0 < |x_1^0| < \eta$ est de la forme (14), où a est une quantité positive arbitraire.

Cas où $n > 1$. — La méthode va consister à admettre que le théorème est vrai pour $n = 1, 2, \ldots, q$, et à démontrer qu'il est encore vrai pour $n = q + 1$.

Les équations (8), pour le système (7) correspondant, deviennent

$$(15) \quad \begin{cases} m\rho_1 \;\; = \dfrac{\rho_1}{1-p} = \varphi_1(\rho_1) = -\beta_1 \rho_1^p, \\ m\rho_2 \;\; = \varphi_2(\rho_1, \rho_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m\rho_{q+1} = \varphi_{q+1}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{q+1}) \quad (^1). \end{cases}$$

Je remplacerai, pour simplifier, x_{q+1}, ρ_{q+1}, X_{q+1}, φ_{q+1}, $\ldots$, par x, ρ, X, φ, $\ldots$.

Je dis d'abord que les conditions du premier alinéa du théorème I sont nécessaires.

En effet, je suppose stables (dans le domaine de l'origine) les solutions réelles de (6). L'équation

$$dt = \frac{dx_1}{X'_1}, \qquad X'_1 = -\beta_1 x_1^p + Z_1 x_1^{p+\sigma},$$

appartenant à (6), donne

$$x_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x_1 = (\rho_1 + \varepsilon_1)(a + t)^m \qquad \text{avec} \qquad \rho_1 \neq 0.$$

La solution correspondante de (6) ne peut être stable que si $x_1 = 0$,

---

(1) A toute solution réelle $\rho_1, \ldots, \rho_i$ des i premières équations (15) correspond toujours une solution réelle ρ_{i+1} de la $(i+1)^{\text{ième}}$ puisque p est impair.

ou si, x_1 étant $\neq 0$, on a $\beta_1 > 0$. Dans le second cas, ρ_1 étant réel si l'on veut, a est $\geqq 0$, et la solution $x_i = \rho_i(a+t)^m$ du système (7) est stable. Dans le premier cas, $x_2, \ldots, x$ sont solutions du système

$$(16) \qquad dt = \frac{dx_2}{X'_2} = \ldots = \frac{dx}{X'}, \qquad \text{où} \qquad x_1 = 0,$$

et pour lequel le théorème I est supposé vrai. Mais le système analogue à (7) correspondant à ce système (16) est

$$(17) \qquad dt = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx}{X}, \qquad \text{où} \qquad x_1 = 0.$$

Les solutions déterminantes de ce dernier système sont celles de (7), quand on fait dans (7) $x_1 = 0$: ces solutions sont encore stables d'après l'hypothèse, puisque le système (16) n'a plus que q variables $x_2, \ldots, x$ autres que t. Finalement, les conditions du premier alinéa du théorème I sont nécessaires.

En particulier, soit dans (6) $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$; on a

$$(18) \qquad dt = \frac{dx_i}{X'_i} = \frac{dx_i}{-\beta_i x_i^p + Z_i x_i^{p+\delta}},$$

où Z_i ne dépend que de x_i. Puisque, par hypothèse, $\beta_i \neq 0$, il faut $\beta_i > 0$ (1).

On peut d'ailleurs remarquer que, lorsque $\beta_1, \ldots, \beta_p, \beta$ sont $\neq 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que les solutions déterminantes de (7) soient toutes stables est que $\beta_1, \ldots, \beta_q, \beta$ soient > 0. En effet, les conditions sont nécessaires d'après (18); elles sont de plus suffisantes, car si $\rho_i > 0$, les solutions de (7) pour lesquelles $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, $x_i \neq 0$ sont telles que $dt = \dfrac{dx_i}{-\beta_i x_i^p}$, c'est-à-dire stables, puisque la valeur ρ_i correspondante est réelle et $\neq 0$, ce qui exige $a > 0$ [équations analogues à (12)].

(1) Quand $\beta_i < 0$, la solution est instable d'après ma définition; mais cela ne veut pas dire que $|x_i|$ va toujours croître indéfiniment avec t. Si, par exemple, $X'_i = -\beta_i x_i^p - \gamma x_i^{p'}$, $\gamma > 0$, p' impair $> p$, dès que $|x_i|$ est assez grand, $\dfrac{dx_i}{dt}$ est de signe contraire à x_i, et $|x_i|$ reste limité supérieurement.

J'établis maintenant que les conditions du premier alinéa du théorème I sont suffisantes, et que, quand elles ont lieu, c'est-à-dire quand on a $\beta_1, \ldots, \beta_q$ et $\beta > 0$, les solutions de (6) sont stables dans le domaine de l'origine. On montrera ensuite qu'elles sont de la forme (10).

D'abord, ces conditions étant réalisées, les solutions de (6) pour lesquelles $x_1 = 0$ sont toutes stables. En effet, ces solutions dépendent du système (16); le système (17) correspondant a toutes ses solutions stables, et il en est de même de (16) par hypothèse. De plus $x_2, \ldots x_q$, x sont de la forme (10).

Je suppose donc x_1 et $x_1^0 \neq 0$; par hypothèse, $x_1, \ldots, x_q$ sont de la forme

$$x_j = (\rho_j + \varepsilon_j)(a+t)^{\frac{1}{1-p}},$$

avec $a \geqq 0$, $\rho_1 \neq 0$, $\lim \varepsilon_j = 0$ pour t infini positif.

Lemme I. — *Quand les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_q^0, x^0$ de $x_1, \ldots, x_q, x$ ont leurs valeurs absolues $\leqq \eta$ (η assez petit), $|x_1|, \ldots, |x_q|$, $|x|$ restent limités supérieurement et $\leqq f_{q+1}(\eta)$ (où f_{q+1} ne peut dépendre que des coefficients des polynomes $X_1, \ldots, X_q$, X et de η, et s'annule avec η).*

On sait que ceci est vrai pour $q = 0$ (cas de $n = 1$). J'admets que le lemme est vrai pour $x_1, \ldots, x_q$; par suite, $|x_1^0|, \ldots, |x_q^0|$ étant $\leqq \eta$, $|x_1|, \ldots, |x_q|$ restent $\leqq \eta' = f_q(\eta)$ qui s'annule avec η. On a

$$\frac{dx}{dt} = X' = \varphi(x_1, \ldots, x_q, x) + Y = -\beta x^p + \ldots + Y.$$

$|x_1|, \ldots, |x_q|$ restant $\leqq \eta'$, dès que $|x|$ atteint $\nu\eta'$, on a

$$\varphi(x_1, \ldots, x_q, x) = -\beta x^p(1+\varepsilon') \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon'| \leqq \frac{1}{4},$$

ν ne dépendant que des coefficients de φ, puisque φ est homogène [1].

---

[1] En effet, il suffit $\beta|x^p| \geqq 4\Sigma$, Σ étant la somme des valeurs absolues des autres termes de φ, où l'on remplace $x_1, \ldots, x_q$ par η'; si $|x| = \nu_1\eta'$, il suffit $\beta\nu_1^p \geqq 4\Sigma_1$, où Σ_1 se déduit de Σ en y remplaçant $|x|$ par $\nu_1\eta'$, puis supprimant le facteur η'^p : ν est alors une limite supérieure $\geqq 1$ des racines positives de $\beta\nu_1^p - 4\Sigma_1 = 0$, équation en ν_1.

Prenant alors $|x| = \nu\eta'$ assez petit ([1]), ce qui est possible si η et η' sont assez petits, $|Y|$ est très petit par rapport à $|x|^p = (\nu\eta')^p$, et

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x^p(1+\varepsilon'') \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon''| < \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, η étant pris assez petit, et $|x_1^0|, \ldots, |x_q^0|, |x^0|$ au plus égaux à η, $|x|$ ne peut atteindre en croissant une certaine limite $\nu\eta'$ sans décroître; $|x_1|, \ldots, |x_q|, |x|$ ne peuvent dépasser $\nu\eta' = f_{q+1}(\eta)$, $f_{q+1}(\eta)$ s'annulant avec η. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Quand les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_q^0, x^0$ de $x_1, \ldots, x_q, x$ ont leurs valeurs absolues $\leqq \eta$ [η assez petit ([2])], à partir d'un temps t_1 assez grand, $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ reste limité supérieurement et $\leqq \mu$ (où μ ne dépend que des coefficients de $X_1, \ldots, X_q, X$); donc, x tend vers* o *avec $\frac{1}{t}$.*

En effet, soient

$$u_1 = \frac{x_1}{x_1} = 1, \qquad u_2 = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \ldots, \qquad u_q = \frac{x_q}{x_1}, \qquad u = \frac{x}{x_1};$$

on a, d'après (6) et (11),

$$du = \frac{x_1\,dx - x\,dx_1}{x_1^2} = \frac{x_1 X' - x X_1'}{x_1^2}\,dt,$$

$$(19) \qquad \frac{1}{x_1^{p-1}}\frac{du}{dt} = \frac{X' - uX_1'}{x_1^p} = \frac{X - uX_1 + Y - uY_1}{x_1^p} = \psi + \beta_1 u + \psi_1,$$

$$X_1' = -\beta_1 x_1^p + Y_1, \qquad X' = -\beta x^p + \ldots + Y,$$

$$\psi_1 = \frac{Y - uY_1}{x_1^p}, \qquad \psi = \varphi(1, u_2, \ldots, u_q, u).$$

$|x|$ restant limité et aussi petit qu'on veut, d'après le lemme I, on peut

---

([1]) Cette restriction est inutile quand $Y_1 = 0$ identiquement, quel que soit i; alors η est arbitraire, même si les coefficients des φ_i ou des X_i sont variables entre certaines limites, comme il a été dit.

([2]) Cette restriction est inutile quand $Y_i = 0$ identiquement, quel que soit i, même si les coefficients des φ_i ou des X_i sont variables entre certaines limites, comme il a été dit.

toujours n'envisager que des temps t, tels que $u_1, \ldots, u_q$ soient aussi voisins qu'on veut des valeurs de la forme $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}$ vers lesquelles ces quantités tendent par hypothèse. Je suppose qu'il en soit ainsi.

X et X_1 ne renferment que des termes de degrés $> p$ en $x_1, \ldots, x_q$, x; ψ_1 est ainsi composé de termes de la forme $\varepsilon' u_2^{k_2} \ldots u^k$, où $k_2 + \ldots + k \leq p$, et où ε' est aussi petit qu'on veut quand $|x_1|, \ldots, |x_q|$, $|x|$ sont assez petits.

D'autre part

$$\psi + \beta_1 u = -\beta u^p + \lambda_1, \qquad \beta > 0,$$

où λ_1 ne contient que des termes de degré $< p$ en u, de la forme $\gamma u_2^{k_2} \ldots u^k$; lorsque $|u|$ est au moins égal à un certain nombre $\mu \leq 1$ qui ne dépend que des coefficients de ψ (ou de φ), de β_1, de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q$, c'est-à-dire finalement des coefficients de $X_1, \ldots, X_q, X$,

$$\psi + \beta_1 u = \frac{X - u X_1}{x_1^p} = -\beta u^p + \lambda_1 = -\beta u^p (1 + \varepsilon'_1), \qquad |\varepsilon'_1| < \frac{1}{4}.$$

D'ailleurs, quand $|u| \geq \mu$, si η est assez petit, $|\psi_1| < \varepsilon_2 \beta |u^p|$ (où $\varepsilon_2 < \frac{1}{4}$, et même est aussi petit qu'on veut), car, d'après l'hypothèse, $|\psi_1 x_1^p|$ est d'ordre de petitesse au moins égal à celui de $|x|^{p+\delta}$, quand $|x|$ est suffisamment petit. Donc alors [1]

$$\frac{1}{x_1^{p-1}} \frac{du}{dt} = -\beta u^p (1 + \varepsilon'_3) \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon'_3| < \frac{1}{2}.$$

Il est maintenant évident que $|u|$ décroît, puisque p est impair, $\frac{du}{dt}$ étant du signe de $-u$; x_1 tendant vers o avec $\frac{1}{t}$, il en est de même de x, puisque $|u|$ a une limite supérieure dès que t dépasse une certaine limite t_1. Il en résulte que ε', $\varepsilon' u_2^{k_2} \ldots u^k$, ψ_1 tendent vers o avec $\frac{1}{t}$.

C. Q. F. D.

---

[1] L'égalité reste vraie lorsque, les Y_i étant nuls, les coefficients des $X_1, \ldots, X_q$, X sont variables (y compris β) entre certaines limites, comme il a été dit plus haut, de façon que $\beta_1, \ldots, \beta_q, \beta$ restent supérieurs et inférieurs à des nombres fixes > 0, et que les autres coefficients soient limités supérieurement.

Lemme III. — *Dans les mêmes conditions, au bout d'un temps $t_2 \geqq t_1$ assez grand, u prend une valeur aussi voisine qu'on veut d'une racine réelle σ de l'équation en u*

$$\psi + \beta_1 u = 0.$$

En effet, je suppose que ceci n'ait jamais lieu à partir d'un certain moment t'_1 assez grand; dans cette hypothèse, pour toute racine réelle σ de cette équation, on a indéfiniment, dès que $t \geqq t'_1$, $|u - \sigma| \geqq \zeta'$, où ζ' est un nombre fixe aussi petit qu'on veut; par suite, $|\psi + \beta_1 u| \geqq \zeta_1$ (ζ_1 nombre fixe analogue à ζ' et fonction de ζ' et des coefficients de $X_1, \ldots, X_q, X$). D'après ce qu'on a vu, ψ_1 tend vers 0 avec $\frac{1}{t}$, et l'on a

$$|\psi + \beta_1 u + \psi_1| \geqq \frac{\zeta_1}{2},$$

à partir d'une certaine valeur de t; $\psi + \beta_1 u + \psi_1$ garde un signe constant, ainsi que $\frac{du}{dt}$, d'après (19). La variation Δu de u pendant l'intervalle de t' à $t' + \tau$ est, d'après (19), telle que

$$|\Delta u| \geqq \int_{t'}^{t'+\tau} \frac{\zeta_1}{2} x_1^{p-1}\, dt = \frac{1}{2}\zeta_1 \int_{t'}^{t'+\tau} (\rho_1 + \varepsilon_1)^{p-1} \frac{dt}{a+t},$$

$$|\Delta u| \geqq \frac{\zeta_1 \rho_1^{p-1}}{4} \int_{t'}^{t'+\tau} \frac{dt}{a+t} = \frac{\zeta_1 \rho_1^{p-1}}{4} \mathrm{L}\left(1 + \frac{\tau}{a+t'}\right).$$

$|u|$ pourrait croître indéfiniment avec τ, ce qui est impossible d'après le lemme II. Il y a donc une racine σ telle que $|u - \sigma| < \zeta'$ à un moment $t_2 \geqq t_1$ assez grand, si petit que soit ζ'. C. Q. F. D.

Remarquant que [1]

$$\psi + \beta_1 u = \varphi(1, u_2, \ldots, u_q, u) + \beta_1 u,$$

et que, lorsque $t \geqq t_1$ et t_1 assez grand, $u_2, \ldots, u_q$ diffèrent aussi peu

---

[1] Lorsque les Y_i sont nuls identiquement, et que les X_i ont leurs coefficients variables comme il a été dit plus haut, les coefficients $A = A'(1 + \varepsilon)$ tendent vers leurs limites A' quand $x_1, \ldots, x_q, x$ tendent vers 0, et ce sont ces limites qui interviennent dans (19 *bis*) et (20).

qu'on veut de $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}$ d'après l'hypothèse, on voit que σ diffère de moins de ζ' d'une racine réelle $\frac{\rho}{\rho_1}$ de

$$(19\ bis) \qquad \varphi\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}, \frac{\rho}{\rho_1}\right) + \beta_1 \frac{\rho}{\rho_1} = 0,$$

telle que

$$(20) \qquad \varphi(\rho_1, \ldots, \rho_q, \rho) = m\rho,$$

d'après (15).

ζ' étant donné (aussi petit qu'on veut), on a, au bout d'un temps t_2 assez grand,

$$|u - \sigma| < \zeta', \qquad \left|\sigma - \frac{\rho}{\rho_1}\right| < \zeta',$$
$$\left|u - \frac{\rho}{\rho_1}\right| < 2\zeta'.$$

Si, par la suite, $\left|u - \frac{\rho}{\rho_1}\right|$ redevenait $\geqq 2\zeta'$, le lemme III montre qu'à un moment $t_3 > t_2$ assez grand, $\left|u - \frac{\rho'}{\rho_1}\right|$ devient $< 2\zeta'$, ρ' étant une racine réelle de (20), égale ou non à ρ; on peut continuer de la sorte. Donc :

Lemme IV. — *Ou bien $u\rho_1$ tend vers une racine ρ de (20) $\left(\text{auquel cas } \frac{x}{x_1} \text{ tend vers } \frac{\rho}{\rho_1}\right)$, ou bien $u\rho_1$ diffère une infinité de fois de moins de $2\zeta'\rho_1$ d'une racine réelle de l'équation (20) en ρ, et une infinité de fois d'au moins $2\zeta'\rho_1$ de toute racine réelle de cette équation (ζ' étant un nombre fixe aussi petit qu'on veut).*

Pour établir complètement le théorème I, il ne reste plus qu'à écarter ce second cas.

Je suppose que ce second cas soit réalisé. Soit

$$(21) \qquad P = P(u) = \varphi\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}, u\right) + \beta_1 u;$$

on a, d'après (19),

$$(22) \quad \frac{1}{x_1^{p-1}} \frac{du}{dt} = \varphi(1, u_2, \ldots, u_q, u) + \beta_1 u + \psi_1 = P + \varepsilon_1' + \psi_1 = P + \varepsilon_2',$$

où ε'_2 tend vers o avec $\frac{1}{t}$;

$$P(u) = -\beta u^p + \lambda_2, \qquad \beta > 0;$$

où λ_2 est un polynome en u de degré $< p$.

Soient σ_1 la plus petite racine réelle, σ_2 la plus grande racine réelle de P : si, t étant $> t_4$ (t_4 assez grand), u prend la valeur $\sigma_1 - \varepsilon$, ou la valeur $\sigma_2 + \varepsilon$ (ε fixe, positif et aussi petit qu'on veut), $\frac{du}{dt}$ est respectivement positif ou négatif. On sait, d'après le lemme IV, que u prend pour $t_5 > t_4$ une valeur comprise entre $\sigma_1 - \varepsilon$ et $\sigma_2 + \varepsilon$; donc, à partir de ce moment t_5, u reste compris entre $\sigma_1 - \varepsilon$ et $\sigma_2 + \varepsilon$.

D'autre part, pour $t \geqq t_5$, soit ν_0 une valeur de u qui diffère d'au moins ε' d'une racine réelle quelconque de P (ε' comme ε), et, *par exemple*, $P(\nu_0) > 0$: u croît, et ne peut jamais reprendre la valeur ν_0 par la suite, car on a aussi, par raison de continuité, $P(u) > 0$ quand u est compris entre ν_0 et $\nu_0 + \frac{\varepsilon'}{2}$. Soit ν_1 la racine réelle de P immédiatement supérieure à u_0. Si elle est d'ordre impair, $P(\nu_1 + \varepsilon'') < 0$ (ε'' comme ε), et $\frac{du}{dt}$ est < 0 pour $u = \nu_1 + \varepsilon''$ (dans le cas général, ν_1 est racine simple, et $\frac{\partial P}{\partial \nu_1} < 0$); on voit que u va tendre vers ν_1. Si ν_1 est une racine d'ordre pair, ou bien u tendra vers ν_1, ou bien u prendra une valeur $\nu_1 + \varepsilon''$ telle que $P(\nu_1 + \varepsilon'') > 0$. Dans ce dernier cas, à partir de ce moment, on raisonnera comme ci-dessus en considérant la plus petite racine ν_2 de P supérieure à ν_1.

Le cas où $P(\nu_0) < 0$, et où, par suite, u décroît pour $u = \nu_0$, se traite d'une manière identique : on considère la plus grande racine ν'_1 de P inférieure à ν_0; u tend sûrement vers ν'_1, si ν'_1 est une racine d'ordre impair, et, quand ν'_1 est racine simple, $\frac{\partial P}{\partial \nu'_1} < 0$. C. Q. F. D.

Remarque I (¹). — p étant impair, P a toujours une racine réelle et d'ordre impair ν_1 telle que $P(\nu_1 + \varepsilon'') < 0$, et, en général, que $\frac{\partial P}{\partial \nu_1} < 0$,

(¹) Toutes ces remarques supposent $\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$.

puisque $P(-\infty)$ est positif et $P(+\infty)$ négatif. Le système (15) a toujours une ou des solutions réelles qui conviennent.

Il importe de noter que, si ν_2 est une racine de P telle que $\frac{\partial P}{\partial \nu_2} > 0$, on a

$$P(\nu_2 - \varepsilon) < 0, \qquad P(\nu_2 + \varepsilon) > 0,$$

et u ne tend *jamais* vers ν_2, si, pour $t \geqq t_5$, $|u - \nu_2|$ est à un certain moment $\geqq \varepsilon'$.

Remarque II. — Soit la solution de (6) telle que,

$$x_1 = \ldots = x_i = 0, \qquad x_{i+1} \neq 0,$$

avec les valeurs initiales

$$x_1^0 = \ldots = x_i^0 = 0, \qquad x_{i+1}^0 \neq 0.$$

D'après ce qui précède, la solution de (6) pour laquelle

$$x_1^0 = \ldots = x_{k-1}^0 = 0, \qquad x_k^0 \neq 0$$

est telle que

$$x_k = (\rho_k + \varepsilon_k)(a + t)^m \qquad \text{avec} \qquad \rho_k \neq 0,$$

si petit que soit $|x_k^0|$. Les tangentes à l'origine aux deux trajectoires sont distinctes.

On peut alors donner suffisamment, comme il suit, une idée, au moins en général, de la répartition des trajectoires au voisinage de l'origine. Je remplace $P(u)$ par $P_{q+1}(u_{q+1})$, et j'envisage toutes les droites D d'équation $\frac{x_1}{\rho_1} = \frac{x_2}{\rho_2} = \cdots = \frac{x_n}{\rho_n}$. Je suppose que les $P_i(u_i)$ n'aient que des racines simples; soient

$$w_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \qquad \ldots, \qquad w_n = \frac{\rho_n}{\rho_1}.$$

Parmi les droites D, celles pour lesquelles on a à la fois

$$\frac{\partial P_2}{\partial w_2} < 0, \qquad \frac{\partial P_3}{\partial w_3} < 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial P_n}{\partial w_n} < 0$$

seront, pour ainsi dire, attractives pour les trajectoires, c'est-à-dire que la généralité des trajectoires leur sera tangente à l'origine.

Exemple simple :

$$X_i = -x_i^3, \qquad P_i(u_i) = -u_i^3 + u_i, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial u_i} = -3u_i^2 + 1.$$

Les racines de $P_i(u_i)$ sont -1, 0, $+1$, et, pour elles, $\frac{\partial P_i}{\partial u_i}$ est égal à -2, $+1$, -2 respectivement.

Les trajectoires ont, en général, pour équations

$$x_i^2 = \frac{1}{2(C_i + t)} \qquad (C_i \text{ constante}).$$

et ces trajectoires sont tangentes à l'origine à l'une des droites du système $x_1^2 = \ldots = x_n^2$ correspondant aux racines ± 1 des $P_i(u_i)$; mais il y a des trajectoires exceptionnelles correspondant au cas où quelques-uns des C_i sont infinis et les x_i correspondants nuls.

Remarque III. — Je suppose que X' soit de la forme $X' = xX''$, x étant en facteur dans $\varphi(x_1, \ldots, x_q, x)$ et dans Y. Je dis que x conserve un signe constant.

En effet, puisque

$$\frac{dx}{x} = X''\,dt, \qquad L\left(\frac{x}{x^0}\right) = \int X''\,dt,$$

$x_1, \ldots, x_q, x$ gardant leurs modules limités, $\int X''\,dt$ a son module limité au bout d'un temps fini, et x ne peut s'annuler, ni, *a fortiori*, changer de signe, au bout d'un temps fini.

En particulier, lorsque, dans (6), $X'_i = x_i X_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_1, \ldots, x_n$ conservent constamment leur signe initial quand t varie à partir de $t = 0$.

Bien entendu, sauf pour le cas où les Y_i sont nuls identiquement et où les X_i ont leurs coefficients constants ou variables entre certaines limites comme il a été dit plus haut, il ne s'agit ici que des solutions pour lesquelles les valeurs initiales ont des modules assez petits. Pour les autres solutions, quand $X' = xX''$, le même raisonnement montre seulement que x ne peut changer de signe au bout d'un temps fini tant que $x_1, \ldots, x_q, x, X''$ restent finis.

Plus généralement, un résultat de même genre a lieu quand on a, quel que soit i,

(22 *bis*) $$X_i = \xi'_i + x_i \xi''_i,$$

où ξ'_i ne dépend pas de x_i et reste positif ou nul lorsque $x_1, \ldots, x_{i-1}$ sont positifs ou nuls, ξ''_i restant infiniment petit d'ordre $p-1$ lorsque $x_1, \ldots, x_i$ sont infiniment petits du premier ordre.

Pour $n=1$, (22 *bis*) a toujours lieu avec $\xi'_i = 0$, et x_1 reste positif ou nul si $x_1^0 \geqq 0$. Les conditions (22 *bis*) étant supposées réalisées, j'admets que $x_1, \ldots, x_q$ restent $\geqq 0$ si $x_1^0, \ldots, x_q^0$ sont $\geqq 0$, et je vais montrer qu'il en est de même de $x = x_{q+1}$ si $x^0 = x_{q+1}^0 \geqq 0$. En effet, x ne peut devenir négatif sans s'annuler; si, à ce moment t_1, $\xi' = \xi_{q+1} > 0$, $\dfrac{dx}{dt} > 0$ et x redevient positif; je suppose donc qu'au temps t_1 on ait à la fois

(22 *ter*) $$x = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = X' = 0, \qquad \xi' = 0,$$

et j'admets que x devienne aussitôt après négatif : soit $x = -y$,

$$\frac{dy}{dt} = -X' = -\xi' + y\xi'', \qquad \xi' \geqq 0;$$

y^0 étant aussi petit qu'on veut et > 0, si y croît de y^0 à y^1 pendant le temps τ, $\xi'' \geqq 0$ pendant ce temps, et

$$\frac{dy}{y} \leqq \xi''\, dt, \qquad \mathrm{L}\left(\frac{y^1}{y^0}\right) \leqq \int \xi''\, dt.$$

Le second membre est fini si le temps τ est fini, le premier est au contraire aussi grand qu'on veut, et l'hypothèse que x devient négatif conduit à un résultat absurde [1]. Dans le cas particulier où les conditions $x_1, \ldots, x_{i-1} \geqq 0$, $\xi'_i = 0$ entraînent $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$ (exemple $\xi_i = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{i-1}^3$), quel que soit i, ces raisonnements sont superflus, car (22 *ter*) entraîne alors $x_1 = \ldots = x_q = x = 0$ quel que soit t.

Remarque IV. — Je suppose que, dans (6), les X'_i soient holomorphes dans le domaine de l'origine, c'est-à-dire soient des séries de Maclaurin convergentes procédant suivant les puissances entières

---

[1] Car y^1 étant pris fixe et aussi petit qu'on veut, et τ fini, $\dfrac{y^0}{y^1}$ peut être pris aussi petit qu'on veut.

croissantes des x_j. Une théorie de M. H. Poincaré et ses compléments [1] permettent, dans des cas étendus, de calculer les ε_i, dès que leurs modules sont assez petits.

Soit $\varphi_i = \varphi_i(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i)$: le changement des variables

$$\tau = (a+t)^m, \qquad x_i = (\rho_i + \varepsilon_i)\tau$$

transforme (6) en

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\varepsilon_i}{-\left[(p-1)\sum_1^i{}' \varepsilon_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_j} + \varepsilon_i + \Phi_i + (p-1)\tau^\delta \Psi_i\right]},$$

où

$$Y_i = \tau^{\delta+p}\Psi_i,$$

$|\Psi_i|$ restant limité, δ étant entier, et Φ_i ne contenant que des termes du deuxième degré au moins par rapport aux ε_j. On peut appliquer à ce système la théorie en question : soient $s_1, s_2, \ldots, s_n$, 1 les racines d'une équation qui se réduit ici à

$$\left[s+1+(p-1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}\right]\cdots\left[s+1+(p-1)\frac{\partial\varphi_n}{\partial\rho_n}\right](s-1) = 0;$$

si ces $n+1$ racines sont positives >0 et distinctes, les ε_i sont en général développables en séries procédant suivant les puissances croissantes de $\tau^{s_1}, \ldots, \tau^{s_n}, \tau, \log\tau$, et qui tendent vers o avec τ.

D'ailleurs, d'après (15),

$$1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}(p-1) = 1 - p\beta_1\rho_1^{p-1}(p-1) = 1 + mp(p-1) = 1 - p;$$

d'après (21), où l'on pose $\nu = \frac{\rho}{\rho_1}$ $(\rho_1 \neq 0)$,

$$\rho_1^p P(\nu) = \varphi(\rho_1, \ldots, \rho_q, \rho) + \beta_1\rho\rho_1^{p-1},$$

$$\rho_1^{p-1}\frac{\partial P}{\partial\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \beta_1\rho_1^{p-1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{p-1},$$

$$1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(p-1) = (p-1)\rho_1^{p-1}\frac{\partial P}{\partial\nu} = \frac{1}{\beta_1}\frac{\partial P}{\partial\nu}.$$

---

[1] E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 6 et 17, Paris, 1896, et les auteurs cités dans Painlevé, *Encycl. der Math. Wiss.* (Meyer et Burkhardt), Bd II, Heft 2/3, p. 224-225, en particulier E. Lindelöf et J. Horn. Je crois inutile de chercher à discuter ici avec plus de précision les conditions d'application de la *Remarque IV*.

Les développements en séries ci-dessus seront donc sûrement applicables en particulier si la solution $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de (15) est une solution simple et telle que les diverses quantités $\frac{\partial P}{\partial \nu}$ soient distinctes, < 0 et distinctes de $-\beta_1$. Les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant, si l'on veut (à part la question des signes des β_i), les polynomes homogènes les plus généraux de leur degré, on voit qu'en général, pour les systèmes réels $\rho_1, \ldots, \rho_n$ tels que les $\frac{\partial P}{\partial \nu}$ soient < 0, les ε_i seront calculables par des séries; on sait de plus (*Remarque I*) qu'il y a toujours en général de pareils systèmes $\rho_1, \ldots, \rho_n$ [1].

V.

Cas où p est pair.

Dans ce cas, d'après le paragraphe II et l'équation (13), il ne saurait être question de stabilité pour les systèmes (6) et (7) dans tout le domaine de l'origine, dès que le système (15) a un système de solutions réelles non toutes nulles. Or, ce système (15) admet toujours une solution réelle telle que

$$\rho_1 = \ldots = \rho_q = 0, \qquad m\rho_{q+1} = -\beta_{q+1}\rho_{q+1}^p.$$

Il n'y a donc jamais stabilité dans tout le voisinage de l'origine.

Toutefois, la question de la stabilité peut s'étudier *dans un secteur solide*, si l'on est assuré que $x_1, \ldots, x_n$ y restent.

---

[1] Soit le système

$$\frac{dx_i}{X_i + Y_i} = dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où X_i est un polynome homogène de degré p en $x_1, \ldots, x_n$, Y_i une fonction holomorphe de $x_1, \ldots, x_n$ n'ayant que des termes de degré $> p$. On peut observer que la méthode de la *Remarque IV* est applicable à la recherche des solutions réelles

$$x_i = (\rho_i + \varepsilon_i)(a + t)^m$$

de ce système, voisines des solutions déterminantes réelles du système auxiliaire (1)

$$\frac{dx_i}{X_i} = dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je considérerai le cas du système (6) où l'on suppose $\beta_1, \ldots$ et $\beta_n \neq 0$, et, pour $i = 1, 2, \ldots$ et n,

$$(23) \qquad X'_i = x_i X''_i,$$

(*Remarque III* précédente), c'est-à-dire que X_i et Y_i contiennent x_i en facteur, $\frac{X_i}{x_i}$ tendant vers o quand $x_1, \ldots, x_i$ tendent vers o d'une manière indépendante. Cette condition (23) a toujours lieu dans (6) pour $i = 1$.

On peut établir pour les systèmes (6) satisfaisant à (23) la propriété suivante :

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les solutions réelles du système* (6) *et* (23) [1], *dont les valeurs initiales pour $t = 0$ sont ≥ 0 et assez petites, soient toutes stables, c'est en général que les solutions déterminantes réelles du système* (7) *correspondant, avec des valeurs initiales ≥ 0, soient toutes stables.*

Quand ces conditions sont remplies, ces solutions sont de la forme (10).

Le théorème s'applique dans le cas général où $\beta_1, \ldots, \beta_n \neq 0$, et les conditions $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$ sont alors *toujours* nécessaires et suffisantes : 1° pour la stabilité des solutions de (6) et (23) considérées; 2° pour celle des solutions déterminantes de (7) en question.

La marche à suivre est à peu près la même que quand p est impair. Le théorème II est d'ailleurs tout à fait semblable au théorème analogue qui résulte du théorème I et de la remarque III ci-dessus quand p est impair.

Le cas de $n = 1$ se traite de la même manière qu'au théorème I :

---

[1] On peut aussi substituer aux conditions (23) les conditions plus générales (22 *bis*). De plus, quand (6) est de la forme (7) ou quand, les Y_i étant nuls identiquement, les X_i ont leurs coefficients constants ou variables entre certaines limites, comme il a été dit plus haut, le théorème s'applique pour des valeurs initiales positives quelconques. Les conditions (22 *bis*) ou (23) n'ont d'autre but que de permettre de montrer que les x_i restent ≥ 0 quand les x_i^0 sont ≥ 0, et aussi que, si $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont $\neq 0$, $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$ sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions déterminantes de (7) considérées soient stables.

mais, dans (12 *bis*), le double signe du second membre disparaît, et ρ_1 y est positif. On établit, grâce à (23), que x_1 reste positif quand x_1^0 est positif (*voir* ci-dessous et remarque III ci-dessus).

On raisonne encore de même pour $n > 1$. On sait que (15) admet toujours un ou des systèmes de solutions réelles. Les conditions du premier alinéa du théorème II sont nécessaires.

En effet, si les solutions de (6) en question sont stables, la considération de celles de ces solutions telles que $x_1 = \ldots = x_{i-i} = 0$, $x_i \neq 0$ avec $x_i^0 > 0$, donne $\beta_i > 0$, quel que soit i. Ces conditions $\beta_i > 0$ sont donc nécessaires. D'autre part, quand $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont $\neq 0$, ce sont encore les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions déterminantes de (7) à valeurs initiales positives soient toutes stables : on vérifie qu'elles sont suffisantes par la considération des solutions déterminantes réelles de (7) telles que $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, $x_i \neq 0$, $x_i^0 > 0$, qui donnent $\rho_i > 0$, $a > 0$; on voit aussi qu'elles sont nécessaires : si, en effet, les solutions déterminantes réelles de (7) à valeurs initiales positives sont stables, la solution déterminante *réelle* $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n \neq 0$ de (7) donne d'abord $\beta_n > 0$; la solution déterminante réelle $x_1 = \ldots = x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} \neq 0$, qui existe toujours grâce aux conditions (22 *bis*) ou (23), donne $\beta_{n-1} > 0$; on remarque, dans le cas de (22 *bis*), que la condition $\xi'_n \geqq 0$ a pour conséquence $\eta'_n \geqq 0$ (¹), η_n étant l'ensemble des termes de degré p de ξ'_n; et ainsi de suite.

On voit alors que les conditions $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$ ou celles du premier alinéa du théorème II sont suffisantes.

En effet, le lemme I subsiste légèrement modifié, avec les mêmes notations : $x_1^0, \ldots, x_q^0, x^0$ étant positifs et $\leqq \eta$, $x_1, \ldots, x_q, x$ restent positifs et $\leqq f_{q+1}(\eta)$. Les conditions (23) ou (22 *bis*) interviennent ici, comme dans le cas où $n = 1$, en permettant de montrer que x reste positif. En effet, dans le cas de (23), par exemple, l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x\mathrm{X}'' = -\beta x^p + \ldots + \mathrm{Y}$$

montre encore que $x \leqq \nu\eta'$. On a, d'autre part, comme dans la re-

(¹) Au besoin, pour simplifier, on admettra *a priori* la condition complémentaire $\eta'_n \leqq 0$.

marque III du théorème I,

$$L\left(\frac{x}{x^0}\right) = \int X'' \, dt,$$

tant que x reste positif, et il en résulte, puisque $x_1, \ldots, x_q$, x sont $\leqq f_{q+1}(\eta)$, que x ne peut s'annuler qu'au bout d'un temps infini, en sorte que x conserve son signe [1]. La démonstration des lemmes II, III, IV subsiste intégralement. Le second cas du lemme IV s'écarte d'une manière analogue : $u = \frac{x}{x_1}$ ne peut dépasser $\sigma_2 + \varepsilon$, si σ_2 est la plus grande racine positive de $P(u)$; $P(u)$ a toujours une pareille racine $\geqq 0$, à cause de (23) ou de (22 *bis*), car

$$P(u) = -\beta u^p + \ldots + \chi + \beta_1 u,$$

où χ, terme indépendant de u, est $\geqq 0$; d'autre part, on sait que u reste positif si, pour $t = 0$, u^0 est positif. La démonstration s'achève comme quand p est impair.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Les conditions (23) ou (22 *bis*) interviennent surtout pour permettre d'établir que x et u restent positifs quand leurs valeurs initiales sont positives et $\geqq 0$. Si donc on sait *a priori* (par exemple à cause de conditions physiques auxquelles doivent satisfaire $x_1, \ldots, x_n$) que $x_1, \ldots, x_n$ restent positifs, on peut négliger les conditions (23) et (22 *bis*); d'après ce qui précède, *quand* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *sont* $\neq 0$, *les conditions* $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$ *sont nécessaires et suffisantes pour que les solutions de* (6) *de valeurs initiales positives assez petites soient stables; si ces solutions sont stables, elles sont de la forme* (10).

Remarque II. — Il me suffira d'indiquer qu'on peut encore calculer en général les ε_i comme il a été dit plus haut dans le cas de p impair, grâce à une théorie de M. H. Poincaré et à ses compléments.

Remarque III. — Quand les conditions (23) ou (22 *bis*) ont lieu,

---

(1) On peut voir, comme dans la remarque III du théorème I, que x ne peut devenir négatif quand il prend la valeur zéro.

l'équation $P(u) = 0$, en général, ou bien a une racine $\nu_1 > 0$ d'ordre impair, et même une racine $\nu_1 > 0$ simple pour laquelle $\frac{\partial P}{\partial \nu_1} < 0$, puisque $P(-\infty) < 0$, $P(0) \geq 0$, ou bien une racine nulle telle que $\frac{\partial P}{\partial u} < 0$ pour $u = 0$.

VI.

Extension des résultats précédents.

Les résultats qui précèdent peuvent s'étendre à des systèmes d'équations différentielles analogues à (6), mais où les X'_i et les X_i ont des formes un peu plus générales. Je me contenterai d'envisager le cas suivant qui comporte des applications en hydraulique, comme on le verra plus loin.

Je considère le système

$$dt = \frac{dx_1}{X'_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X'_n}, \tag{6 bis}$$

et le système auxiliaire

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{7 bis}$$

où

$$X_i = \frac{U_i}{V_i}, \qquad X'_i = \frac{U'_i}{V'_i}, \qquad U'_i = U_i + R_i, \qquad V'_i = V_i + S_i;$$

U_i et V_i sont des polynomes homogènes de degré p_1 et p'_1 en $x_1, \ldots, x_i$, et $p_1 - p'_1 = p$ est *pair* et > 0; R_i et S_i sont analogues à Y_i dans (6), c'est-à-dire d'ordre au moins égal à $p_1 + \delta$, $p'_1 + \delta$ (δ fixe > 0) quand $x_1, \ldots, x_i$ sont des infiniment petits du premier ordre; R_i et S_i ne dépendent que de $x_1, \ldots, x_i$, et V_i de x_i.

Le cas où $p'_1 = 0$, $V'_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) a fait l'objet du théorème II.

D'abord, si l'on pose

$$X_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_i),$$

φ_i n'est plus un polynome, mais est homogène et de degré p : la substitution (2) dans (7 *bis*) donne encore des équations analogues à (3).

(4) et (5), et les équations (15) se conservent, ainsi que les résultats du paragraphe II relatifs au cas où p est pair [1].

En particulier, quand $n = 1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = X'_1 = \frac{U'_1}{V'_1}; \tag{24}$$

on peut écrire

$$U'_1 = -\beta_1 x_1^{p_1} + Z_1 x_1^{p_1+\delta}, \qquad V'_1 = x_1^{p'_1}(1 + Z_1 x_1^{\delta}),$$

où $|Z_1|$, $|Z'_1|$ sont limités supérieurement quand $|x_1|$ est assez petit,

$$\frac{U'_1}{V'_1} = \frac{-\beta_1 x_1^p + Z_1 x_1^{p+\delta}}{1 + Z'_1 x_1^{\delta}} = (-\beta_1 x_1^p + Z_1 x_1^{p+\delta})(1 + \varepsilon),$$

et $\lim \varepsilon = 0$ pour $x_1 = 0$. L'équation (15) correspondante est

$$\frac{\rho_1}{1-p} = -\beta_1 \rho_1^p,$$

et elle a toujours une racine réelle $\rho_1 \neq 0$ puisque p est pair. J'envisage encore les solutions pour lesquelles $x_1 \geqq 0$: elles ne peuvent être stables que si $\beta_1 > 0$, ce que je suppose, d'où $\rho_1 > 0$. Dès lors, x_1 reste limité supérieurement si $0 \leqq x_1^0 \leqq \eta$; si $x_1^0 > 0$, x_1 ne peut s'annuler au bout d'un temps fini ; si $x_1^0 = 0$, x_1 ne peut devenir négatif au bout d'un temps fini (raisonnement de la remarque III du théorème I), et x_1 reste nul. Enfin, quand β_1 est > 0, on a ou bien $x_1 = 0$, ou bien

$$x_1 = (\rho_1 + \varepsilon_1)(a + t)^{\frac{1}{1-p}}, \qquad a > 0, \qquad \rho_1 > 0,$$

$\lim \varepsilon_1 = 0$ pour $t = \pm\infty$ (raisonnement du théorème I avec modification légère de la valeur de η_1).

Quand $n > 1$, j'assujettirai, pour $i > 1$, les fonctions U'_i, V'_i aux conditions

$$U'_i = \xi'_i + x_i \xi''_i, \qquad V'_i = x_i^{p'_i}(1 + Z'_i); \tag{25}$$

dans ces formules, ξ'_i est fonction de certaines des quantités $x_1, \ldots, x_{i-1}$; ξ''_i, Z_i sont fonctions des mêmes quantités que ξ'_i, et, de plus, de x_i.

---

[1] Les résultats du paragraphe II subsistent évidemment quand U_i et V_i sont homogènes et de degré p_1, p'_1 respectivement en $x_1, \ldots, x_n$, avec $p_1 - p'_1 > 1$ et pair ou impair.

Enfin, pour $x_1, \ldots, x_{i-1} \geqq 0$, ξ_i est positif, et ne peut s'annuler que si celles des quantités $x_1, \ldots, x_{i-1}$ qu'elle renferme sont toutes nulles; ξ_i'' et Z_i' sont infiniment petits quand $x_1, \ldots, x_i$ le sont à la fois. Je suppose $-\beta_i$, coefficient de $x_i^{p_i}$ dans U_i, différent de zéro quel que soit i. Je ne m'occupe, d'autre part, que des solutions pour lesquelles

$$(25\ bis) \qquad x_i^0 \neq 0, \quad \text{quand} \quad x_{i-1}^0 \neq 0.$$

On peut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème III. — *Quand $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont $\neq 0$, la condition nécessaire et suffisante pour que les solutions réelles du système* (6 *bis*) *et* (25) [1], *dont les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ pour $t = 0$ sont $\geqq 0$, assez petites et telles que* (25 *bis*) *ait lieu, soient toutes stables, c'est que $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_n > 0$.*

Quand $\beta_1, \ldots$ et β_n sont > 0, ces solutions sont de la forme (10).

En effet, d'après ce qu'on vient de voir, le théorème est vrai pour $n = 1$; soit $n > 1$. La propriété étant supposée exacte pour $n = 1, 2, \ldots, q$, je l'établis pour $n = q + 1$. Les équations (15) se conservent; les conditions du premier alinéa du théorème III sont nécessaires : il faut, si $-\beta_i x_i^{p_i}$ est le terme en $x_i^{p_i}$ dans U_i', que $\beta_1, \ldots, \beta_q, \beta$, *supposés* $\neq 0$, soient > 0 : la considération de la solution $x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, $x_i \neq 0$ le montre de suite.

Cette condition est suffisante. En effet, on peut d'abord admettre que $x_1 > 0$, le théorème étant évidemment vrai quand $x_1^0 = 0$ (d'où $x_1 = 0$). On a donc à traiter le cas où $x_1^0 > 0$, par suite $x_2^0, \ldots, x_q^0$, et $x^0 > 0$ d'après (25 *bis*); on peut encore considérer comme démontré que $x_1, \ldots, x_q$ restent > 0.

Ceci posé, le lemme I subsiste légèrement modifié : d'abord, si $x_1^0, \ldots x_q^0, x^0 \leqq \eta$, $x_1, \ldots, x_q$, x sont $\leqq f_{q+1}(\eta)$. Les conditions (25) et (25 *bis*) interviennent pour permettre d'établir que x reste > 0. Si ξ' est nul identiquement, ξ'' et Z' ne dépendent que de x,

---

[1] Si l'on sait *a priori* que $x_1, \ldots, x_n$ restent $\geqq 0$, la première des conditions (25) relative aux U_i' et la restriction (25 *bis*) deviennent inutiles. D'autre part, quand (6 *bis*) coïncide avec (7 *bis*), le théorème s'applique pour des valeurs initiales *quelconques* positives telles que (25 *bis*) ait lieu.

$\frac{dx}{dt} = X'$ se réduit à une équation de la forme (24) avec $\beta > 0$, et le théorème est évidemment vrai. Si ξ' n'est pas nul identiquement, et si x, positif, tend vers o (t restant fini), $\xi' > 0$, en sorte que, x étant assez petit et > 0, $\xi' + x\xi'' > 0$, $\frac{dx}{dt} > 0$, x croît et ne peut s'annuler : x reste > 0.

Les lemmes II, III, IV subsistent. On a

$$\varphi\left(1, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_q}{\rho_1}, u\right) + \beta_1 u = \frac{-\beta u^{p_1} + \lambda_1}{u^{p'_1}} + \beta_1 u = \frac{P(u)}{u^{p'}},$$

$$P(u) = -\beta u^{p_1} + \lambda_1 + \beta_1 u^{p'_1+1},$$

λ_1 étant un polynome en u de degré $< p_1$.

$$\frac{1}{x_1^{p-1}} \frac{du}{dt} = \frac{P + \varepsilon'_2}{u^{p'_1}}, \qquad \lim \varepsilon'_2 = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = +\infty.$$

$u = \frac{x}{x_1}$ reste positif, et ne peut dépasser $\sigma_2 + \varepsilon$, si σ_2 est la plus grande racine positive de $P(u)$ [d'après (25), il y a toujours une pareille racine > 0]. La discussion s'achève comme aux théorèmes I et II [1].

Remarque. — Il est utile, pour la suite, de mentionner que le théorème ci-dessus reste vrai quand, dans un domaine sphérique D ayant son centre à l'origine, les U'_i sont des polynomes en $x_1, \ldots, x_i$ dont les coefficients A sont constants ou variables et de la forme $A'(1+\varepsilon)$, et que $V'_i = B'(1+\varepsilon')x_i^{p'_1}$, avec ε, ε' nuls à l'origine $x_k = 0$, $1+\varepsilon$ et $1+\varepsilon'$ restant compris entre des limites fixes > 0 et suffisamment rapprochées, B' étant > 0, et les coefficients des $x_i^{p_1}$ dans les U'_i étant plus petits qu'un nombre fixe < 0. Le domaine Δ des valeurs initiales des solutions pour lesquelles le théorème est vrai peut être pris d'autant plus étendu que D est plus grand. Le domaine sphérique D ne comprend, bien entendu, que les points compris dans une sphère $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$ et dont les coordonnées sont $\geqq 0$. Si D, c'est-à-dire R, est infini, Δ comprend tous les points de D satisfaisant à (25 *bis*).

---

[1] Il est facile de vérifier que le théorème III subsiste quand p est impair et > 1 : l'hypothèse que p est pair ne joue en effet aucun rôle essentiel dans la démonstration.

VII.

Applications à l'hydraulique. — Systèmes de réservoirs.

J'ai étudié antérieurement [1] les débits d'un système de n réservoirs d'eau *cylindriques* $S_1, \ldots, S_n$ dont la surface est libre et qui se vident par des déversoirs non noyés ou des ajutages, dans le cas où les eaux issues de S_i alimentent un ou plusieurs des réservoirs $S_{i+1}, \ldots, S_n$.

Je considère encore le même cas, mais en admettant que les réservoirs, au lieu d'être cylindriques, ont des formes quelconques : le débit externe de S_i peut être regardé comme une somme de fonctions $f_i(Y_i) = \sum_k f_{ki}(Y_i)$ exclusivement du niveau Y_i dans S_i, $f_{ki}(Y_i)$, avec $k > i$, étant la fraction du débit externe de S_i qui alimente S_k; la section horizontale s_i de S_i est aussi une fonction $\psi_i(Y_i) = s_i$. Les équations différentielles qui régissent les variations des niveaux des réservoirs sont alors

$$(26) \qquad s_i \frac{dY_i}{dt} = a_{i1} f_{i1}(Y_1) + \ldots + a_{i,i-1} f_{i,i-1}(Y_{i-1}) - f_i(Y_i),$$

où a_{ij} est égal à 1 si S_j alimente S_i, à 0 dans le cas contraire; $f_i(Y_i)$ est fonction croissante de Y_i (condition naturelle) et $\psi_i > 0$. Les fonctions f_{ki} ne dépendent que de la forme, de la nature et de la disposition des exutoires de S_i.

J'examine le cas où chaque réservoir S_i possède des exutoires constitués uniquement par des déversoirs à crête horizontale de même niveau $y_i < Y_i$ pour S_i; on sait qu'alors, si la largeur l_{ki} du déversoir est peu variable avec Y_i,

$$f_{ki}(Y_i) = m_{ki} l_{ki} (Y_i - y_i)^{\frac{3}{2}},$$

où m_{ki} est un coefficient peu variable avec Y_i; c'est ce que je supposerai. Le changement de variables $z_i = (Y_i - y_i)^{\frac{1}{2}}$ transforme le sys-

---

[1] *Comptes rendus*, 13 mars 1905; *Bull. Soc. math.*, t. XXXIII, 1905, p. 129; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1906.

tème (26) dans le système

$$2s_i z_i \frac{dz_i}{dt} = a_{i1} m_{i1} l_{i1} z_1^3 + \ldots - \left(\sum_k m_{ki} l_{ki} \right) z_i^3,$$

qu'on peut écrire plus simplement (¹)

$$(27) \qquad s_i z_i \frac{dz_i}{dt} = b_{i1} z_1^3 + \ldots + b_{i,i-1} z_{i-1}^3 - b_{ii} z_i^3.$$

La remarque du théorème III s'applique à ce système pourvu que s_i ne croisse pas indéfiniment avec Y_i ou z_i et reste limité inférieurement, c'est-à-dire, en fait, pourvu que, dans les limites où les z_j varient, s_i ne soit pas trop variable.

Soient $c_{i1}, \ldots, c_{ii}, s'_i$ les valeurs de $b_{i1}, \ldots, b_{ii}, s_i$ pour $z_1, \ldots, z_i$ nuls : les équations (15) deviennent, puisqu'ici $p = 2$, $m = \frac{1}{1-p} = -1$, $p_1 = 3$, $p'_1 = 1$,

$$-\rho_i = m\rho_i = \varphi_i(\rho_1, \ldots, \rho_i) = \frac{c_{i1}\rho_1^3 + \ldots + c_{i,i-1}\rho_{i-1}^3 - c_{ii}\rho_i^3}{s'_i \rho_i},$$

ou

$$c_{ii}\rho_i^3 - s'_i \rho_i^2 - c_{i1}\rho_1^3 - \ldots - c_{i,i-1}\rho_{i-1}^3 = 0.$$

Cette équation en ρ_i a une racine positive et une seule. Le système

---

(¹) On admet, bien entendu, que les s_i et les b_{ij} satisfont à des conditions telles que l'existence des solutions soit assurée dans le voisinage de

$$z_1 = \ldots = z_n = 0$$

(Picard, *Analyse*, t. II, 1893, p. 291 et 301). Le cas où une partie des eaux de certains déversoirs se perd en dehors du système se ramène au cas considéré par l'adjonction d'un $(n+1)^{\text{ième}}$ réservoir, avec ou sans débit externe, et recueillant ces eaux.

Si l'on supposait que les largeurs des déversoirs varient de façon que

$$f_{ki} = \mathrm{M}_{ki}(Y_i - y_i)^{\frac{r_1}{r}},$$

où r_1 et r sont entiers, et M_{ki} est peu variable avec Y_i, on ferait la transformation

$$z_i^r = Y_i - y_i;$$

le théorème III ou sa remarque s'applique encore au système d'équations différentielles obtenu.

de réservoirs possède ainsi un régime asymptotique unique, où les débits des déversoirs de S_i sont de la forme

$$f_{ki}(Y_i) = \frac{\lambda_{ki}(1+\varepsilon_{ki})}{(a+t)^3},$$

λ_{ki} étant une constante, et $\lim \varepsilon_{ki} = 0$ pour $t = +\infty$. On obtient finalement une extension au cas où les s_i sont variables des résultats que j'avais indiqués (*loc. cit.*) pour le cas où les s_i sont constants.

VIII.

Je voudrais dire encore quelques mots incidemment du cas d'un système analogue de réservoirs $S_1, \ldots, S_n$ dont chacun se vide dans un ou plusieurs des suivants soit par des déversoirs non noyés, soit par des ajutages. On admet de plus que les réservoirs peuvent recevoir du dehors des débits permanents, et que tout réservoir S_i qui ne reçoit l'eau d'aucun des réservoirs $S_1, \ldots, S_{i-1}$ est sûrement alimenté par un débit permanent $A_i \neq 0$; en particulier $A_1 \neq 0$; enfin, les exutoires d'un même réservoir S_i sont ou bien tous des déversoirs dont la crête est au même niveau et la largeur assez peu variable pour chacun avec Y_i, ou bien tous des ajutages de sections assez petites, et dont les centres de gravité sont au même niveau.

En posant encore $Y_i - y_i = u_i$, les équations différentielles des variations des niveaux deviennent

$$(28) \qquad s_i z_i \frac{dz_i}{dt} = B_i + b_{i1} z_1^{\theta_1} + \ldots + b_{i,i-1} z_{i-1}^{\theta_{i-1}} - b_{ii} z_i^{\theta_i},$$

où $b_{ii} > 0$, où les quantités $B_i, b_{i1}, \ldots, b_{i,i-1} \geq 0$ ne sont pas toutes nulles à la fois, et où θ_j est égal à 1 ou 3 suivant que les exutoires de S_j sont des ajutages ou des déversoirs.

Quand les s_i et les b_{ij} sont des constantes, ce système admet pour solution un régime permanent tel que $z_i = \alpha_i > 0$, les α_i étant donnés par les équations

$$(29) \qquad B_i + b_{i1}\alpha_1^{\theta_1} + \ldots + b_{i,i-1}\alpha_{i-1}^{\theta_{i-1}} - b_{ii}\alpha_i^{\theta_i} = 0.$$

Il est évident que ces équations possèdent un système de solutions réelles, d'ailleurs > 0, et un seul. On peut vérifier par les méthodes déjà utilisées, et qui sont basées sur un théorème de M. Poincaré ([1]), qu'en général cette solution est *stable en ce sens* que les solutions z_i de (28), dont les valeurs initiales diffèrent assez peu des α_i, tendent vers α_i.

Ces procédés sont même applicables ([2]) quand les quantités s_i, b_{ij} peuvent varier dans de certaines limites avec les z_i, car on voit encore facilement que les équations (29), où l'on remplace z_k par α_k dans les b_{ij}, ont au moins un système de solutions réelles > 0 (on vérifie de proche en proche l'existence de $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, ...).

Mais l'on peut montrer directement dans les deux cas, en s'inspirant des paragraphes III à VI, ce résultat beaucoup plus complet :

Théorème. — *Toute solution* $z_1, \ldots, z_n$ *de* (28) *dont les valeurs initiales sont* > 0 *tend vers une des solutions* $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$ *de* (29).

La méthode de M. Poincaré et ses compléments servent alors à calculer la variation des z_i quand les z_i sont assez voisins des α_i.

Ce théorème est presque évident quand $i = 1$: on a

$$s_1 z_1 \frac{dz_1}{dt} = B_1 - b_{11} z_1^{\theta_1}, \qquad B_1 > \delta_1 > 0, \qquad \delta_1 \text{ fixe};$$

z_1 ne peut s'annuler quand $z_1^0 > 0$; quel que soit t_1, à un instant t_2 fini $> t_1$, z_1 diffère de moins de ζ_1 d'une racine de

$$B_1 - b_{11} z_1^{\theta_1} = 0,$$

sans quoi, $\frac{1}{s_1} | B_1 - b_{11} z_1^{\theta_1} |$ restant $\geqq \zeta'_1$, $\frac{dz_1}{dt}$ conserve un signe constant,

$$\left| z_1 \frac{dz_1}{dt} \right| \quad \zeta_1; \qquad \left| \frac{z_1^2 - (z_1^1)^2}{2} \right| \geqq \zeta'_1 (t - t_1),$$

z'_1 étant la valeur de z_1 pour $t = t_1$.

([1]) *Voir* aussi Liapounoff (traduction Davaux), *Annales Fac. Sc. Toulouse*, 1907, p. 203 et suiv.

([2]) On peut encore supposer $B_i \geqq 0$ légèrement variable avec z_i ou t; dans ce dernier cas, on doit admettre que B_i a une limite fixe pour $t = +\infty$, laquelle doit être substituée à B_i dans (30). B_i reste toujours supérieur à un nombre fixe > 0 si $b_{i1}, \ldots, b_{i,i-1}$ peuvent s'annuler à la fois.

Quand t est assez grand, ceci est absurde, car $z_1 \dfrac{dz_1}{dt}$ est croissant pour z_1 assez petit, décroissant pour z_1 assez grand. A partir de ce moment t_2, z_1 ne peut s'abaisser de plus de ε au-dessous de la plus petite racine positive, dépasser de plus de ε la plus grande racine positive > 0 de $B_1 - b_{11} z_1^{\theta_1} = 0$, et l'on voit comme au théorème I que z_1 tend vers une racine de cette équation.

On admet le théorème pour $n = 1, 2, \ldots$ et q, et que $z_1, \ldots, z_{i-1}$ restent limités inférieurement par un nombre fixe > 0 et supérieurement, en tendant vers une solution réelle $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_{i-1} > 0$ du système (29) corrélatif. On montre que le théorème et ces résultats sont vrais pour $n = i$. D'après (28), z_i^0 étant > 0, z_i reste limité supérieurement et inférieurement, que B_i soit nul ou non, car, si $B_i = 0$, un des coefficients $b_{i1}, \ldots, b_{i,i-1}$ est $\neq 0$. Au bout d'un temps assez grand, $z_1, \ldots, z_{i-1}$ sont aussi voisins qu'on veut d'une solution $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_{i-1} > 0$ de (28), par hypothèse; on montre encore que z_i tend vers une solution correspondante > 0 de

$$B_i + b_{i1}\alpha_1^{\theta_1} + \ldots + b_{i,i-1}\alpha_{i-1}^{\theta_{i-1}} - b_{ii}\alpha_i^{\theta_i} = 0$$

(on raisonne comme pour $i = 1$). Les débits limites sont faciles à déterminer.

Au point de vue de la théorie des équations différentielles, ce qui précède n'est évidemment qu'un cas particulier de systèmes analogues à (6 *bis*). On pourra, par exemple, considérer le système plus général à certains égards

$$s_i z_i^r \frac{dz_i}{dt} = B_i + \varphi_i(z_1, \ldots, z_i), \qquad B_i \geqq 0, \qquad r \text{ entier } \geqq 0,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, où φ_i est un polynome homogène en $z_1, \ldots, z_i$ de degré p, le coefficient $-\beta_i$ de z_i^p dans φ_i étant négatif et $\neq 0$, et les coefficients pouvant, ainsi que B_i et s_i, être légèrement variables avec $z_1, \ldots, z_i$; on suppose de plus que s_i et β_i restent supérieurs à un nombre fixe > 0, qu'il en est de même de B_i si φ_i ne dépend que de z_i, et que, si φ_i ne dépend pas que de z_i,

$$\varphi_i(z_1, \ldots, z_{i-1}, 0) > 0$$

quand $z_1, \ldots, z_{i-1}$ sont $\geqq 0$ et ne sont pas tous nuls. Alors $B_1 > \delta_1 > 0$

(δ_1 fixe), z_1 reste > 0 et tend vers une racine réelle > 0 de $B_1 - \beta_1 z_1^p = 0$. On verra encore que $z_1, \ldots, z_n$ tendent vers un système $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$ de solutions des équations

$$B_i + \varphi_i(z_1, \ldots z_i) = 0$$

(il existe toujours un pareil système, car l'équation en z_i, de degré p, a son terme en z_i^p négatif pour $z_i = +\infty$, et son terme indépendant de z_i positif > 0). On admet la propriété pour $n = 1, 2, \ldots$ et $q - 1$, et on l'établit pour $n = q$.

Les questions traitées dans les paragraphes VII et VIII et dans mes Notes antérieures précitées sont loin d'être les seules que l'on puisse envisager à propos des systèmes de réservoirs, en vue des applications. La multiplicité des cas susceptibles d'avoir effectivement quelque analogie avec des cas réalisés dans la nature est, pour ainsi dire, indéfinie [1]. On pourrait, par exemple, à propos de (28), supposer que les A_t ne soient plus assujettis à être $\neq 0$, chercher alors à avoir des expressions asymptotiques plus précises des z_i, c'est-à-dire calculer la valeur principale des $z_i - \alpha_i$ en fonction de $\frac{1}{t}$, etc. Ce cas, comme celui des équations (28) dont il est une extension, aura alors quelque ressemblance avec celui plus compliqué du régime d'une rivière canalisée (au moins si les barrages sont fixes et ont leur crête horizontale et si les variations de niveau sont assez lentes). Mais je n'insisterai pas ici sur ce sujet.

Bourg-la-Reine, 20 juillet 1908.

---

[1] Voir *Comptes rendus*, 23 novembre 1908, 12 et 19 juillet 1909; *Journ. École Pol.*, 1909.

Sur quelques figures déterminées par les éléments infiniment voisins d'une courbe gauche;

PAR M. B. HOSTINSKY.

Le présent travail est divisé en quatre Chapitres.

Le premier Chapitre contient quelques propositions relatives à la généralisation connue des déterminations métriques.

Dans le second Chapitre, j'étudie les sphères non euclidiennes circonscrites et inscrites dans des tétraèdres formés ou par quatre points infiniment voisins d'une courbe gauche ou par quatre plans osculateurs infiniment voisins; puis je considère quatre cercles et quatre cônes de révolution déterminés par des éléments infiniment voisins.

Dans le troisième Chapitre, je reviens aux déterminations métriques de la Géométrie ordinaire pour déduire les formules relatives à douze figures limites analogues à celles du Chapitre précédent. J'ai publié ces formules en 1907 dans les *Mémoires de l'Académie Tchèque des Sciences de Prague*.

Le quatrième Chapitre a été ajouté pour montrer comment le principe de dualité permet d'établir une relation simple entre deux théorèmes bien connus de la Géométrie infinitésimale.

CHAPITRE I.

1. Nous commençons par rappeler quelques formules relatives à la généralisation connue des déterminations métriques de la Géométrie.

Soit (Q) la quadrique absolue, représentée en coordonnées tétraédriques par l'équation

$$x^2 y^2 + z^2 + \delta t^2 = 0, \tag{1}$$

δ désignant une constante réelle.

Deux points $A(x, y, z, t)$, $B(x', y', z', t')$ étant donnés, si la droite AB coupe la quadrique (Q) en M et N, nous appellerons *distance de deux points* A, B le logarithme du rapport anharmonique

$$r = (\mathrm{MNAB}) = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{NA}} : \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{NB}}. \tag{2}$$

On trouve

$$r = \frac{xx' + yy' + zz' + \delta tt' - \sqrt{(xx' + yy' + zz' + \delta tt')^2 - (x^2 + y^2 + z^2 + \delta t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + \delta t'^2)}}{xx' + yy' + zz' + \delta tt' + \sqrt{(xx' + yy' + zz' + \delta tt')^2 - (x^2 + y^2 + z^2 + \delta t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + \delta t'^2)}}. \tag{3}$$

Cette formule donne pour r deux valeurs différentes dont l'une est l'inverse de l'autre; il faut qu'il en soit ainsi parce que, dans la formule (2), l'ordre des deux points d'intersection de AB avec (Q) est indéterminé.

Si les deux points A et B se confondent, nous avons

$$r = 1.$$

La dernière équation est encore satisfaite si M se confond avec N, c'est-à-dire si la droite AB est tangente à (Q).

Les coordonnées (u, v, w, p) d'un plan étant liées avec les coordonnées (x, y, z, t) d'un point du plan par l'équation

$$ux + vy + wz + pt = 0,$$

l'équation de la quadrique absolue (1) en coordonnées tangentielles s'écrit

$$u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{\delta} p^2 = 0. \tag{4}$$

Nous appellerons *angle de deux plans* $A(u, v, w, p)$, $B(u', v', w', p')$ le logarithme du rapport anharmonique ρ défini par l'équation

$$\rho = (\mathrm{MNAB}), \tag{5}$$

où M et N sont les deux plans tangents de (Q) qui passent par la droite d'intersection de A et B.

En se servant de l'équation (4), on trouve la formule

$$(6)\quad \rho=\frac{uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'-\sqrt{\left(uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'\right)^2-\left(u^2+v^2+w^2+\frac{1}{\delta}p^2\right)\left(u'^2+v'^2+w'^2+\frac{1}{\delta}p'^2\right)}}{uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'+\sqrt{\left(uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'\right)^2-\left(u^2+v^2+w^2+\frac{1}{\delta}p^2\right)\left(u'^2+v'^2+w'^2+\frac{1}{\delta}p'^2\right)}}$$

qui donne deux valeurs pour ρ dont l'une est l'inverse de l'autre.

Les plans A, B seront dits *normaux* lorsqu'ils sont conjugués par rapport à (Q), c'est-à-dire lorsque

$$uu'+vv'+ww'+\frac{1}{\delta}pp'=0, \qquad \rho=-1.$$

Nous appellerons une droite (d) *normale au plan* (P) si elle passe par le pôle (π) du plan (P) par rapport à la quadrique (Q). Il est clair que chaque plan (P') qui passe par la droite (d) est normal au plan (P), car il contient son pôle.

Pour définir *la distance d'un point* A *à un plan* (P), nous joignons A avec le pôle π de (P). La droite $A\pi$ rencontre (P) en B et (Q) en M et N. Le logarithme du rapport anharmonique

$$(7)\qquad d=(\mathrm{MNAB})$$

sera appelé *distance du point* A *au plan* (P).

Soient (x, y, z, t) les coordonnées du point A, (u, v, w, p) celles du plan (P). On aura

$$(8)\quad d=\frac{\sqrt{(ux+vy+wz+pt)^2-(x^2+y^2+z^2+\delta t^2)\left(u^2+v^2+w^2+\frac{1}{\delta}p^2\right)}-(ux+vy+wz+pt)}{\sqrt{(ux+vy+wz+pt)^2-(x^2+y^2+z^2+\delta t^2)\left(u^2+v^2+w^2+\frac{1}{\delta}p^2\right)}+ux+vy+wz+pt}.$$

Si le plan (P) passe par le point A, d se réduit à l'unité.

Enfin, nous appellerons *angle de deux droites concourantes* le logarithme du rapport anharmonique

$$\sigma=(ll'mn),$$

où l, l' sont les deux droites données, et m, n les deux droites du faisceau (l, l') tangentes à la quadrique (Q).

On peut exprimer σ, d'après M. Lindemann [1], en se servant de l'équation

$$p_{12}^2+p_{23}^2+p_{31}^2+\delta(p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2)=0 \tag{9}$$

qui exprime la condition que la droite dont les six coordonnées homogènes sont données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} p_{12}&=\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}, & p_{23}&=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, & p_{31}&=\begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}, \\ p_{14}&=\begin{vmatrix} x & t \\ x' & t' \end{vmatrix}, & p_{24}&=\begin{vmatrix} y & t \\ y' & t' \end{vmatrix}, & p_{34}&=\begin{vmatrix} z & t \\ z' & t' \end{vmatrix} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

soit tangente à la quadrique $Q(x, y, z, t)$; (x', y', z', t') étant les coordonnées de deux points quelconques sur la droite.

Nous nous bornons à indiquer l'équation à laquelle satisfont les coordonnées de deux droites $l(p_{ik})$, $l'(p'_{ik})$ concourantes normales, c'est-à-dire conjuguées par rapport à (Q) :

$$p_{12}p'_{12}+p_{23}p'_{23}+p_{31}p'_{31}+\delta(p_{14}p'_{14}+p_{24}p'_{24}+p_{34}p'_{34})=0. \tag{11}$$

2. Si nous regardons, dans la formule (3), le point (x', y', z', t') comme fixe, le point (x, y, z, t) comme variable, et r comme une constante donnée, le point (x, y, z, t) décrira une quadrique que nous appellerons *sphère* dont le *centre* est le point (x', y', z', t'). L'équation (3), mise sous la forme rationnelle

$$\begin{aligned} &(1+r)^2(x'^2+y'^2+z'^2+\delta t'^2)(x^2+y^2+z^2+\delta t^2) \\ &\quad =4r(xx'+yy'+zz'+\delta tt')^2, \end{aligned} \tag{12}$$

nous montre que la sphère est inscrite dans la quadrique absolue (Q) suivant l'intersection avec le plan polaire du centre (x', y', z', t'). Si l'on introduit les coordonnées de ce *plan d'inscription*

$$u'=x', \qquad v'=y', \qquad w'=z', \qquad p'=\delta t', \tag{13}$$

---

(1) F. LINDEMANN, *Ueber unendlich kleine Bewegungen, etc.* (*Mathematische Annalen,* t. VIII, § 1, 1874).

l'équation tangentielle de la sphère (12) devient identique avec l'équation (6) pour $\rho = -r$. Donc, chaque plan tangent de la sphère fait un angle constant avec le plan d'inscription.

Nous pouvons même identifier la formule (8) soit avec l'équation ponctuelle de la sphère en posant dans (8)

$$u = u', \qquad v = v', \qquad w = w', \qquad p = p', \qquad d = -r,$$

soit avec l'équation tangentielle de la même sphère en posant dans (8)

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t', \qquad d = r;$$

les lettres accentuées désignent toujours les coordonnées du centre et du plan d'inscription liées par les équations (13).

Par conséquent, chaque point de la sphère a une distance constante au plan d'inscription, et chaque plan tangent d'une sphère a une distance constante au centre.

3. Nous allons étudier les sphères tangentes à quatre plans donnés

$$(14) \qquad A_k(u_k, v_k, w_k, p_k) \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Il est possible de multiplier les coordonnées du centre de chaque sphère cherchée par un facteur tel qu'elles satisfassent aux quatre équations

$$(15) \quad u_k x' + v_k y' + w_k z' + p_k t' = \pm\sqrt{u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 + \frac{1}{\delta} p_k^2} \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

car ces équations expriment, d'après (8), la condition pour que le centre (x', y', z', t') d'une sphère soit équidistant aux quatre plans A_k.

Posons

$$(16) \qquad \Sigma_k = \pm \frac{u_k x' + v_k y' + w_k z' + p_k t'}{\sqrt{u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 + \frac{1}{\delta} p_k^2}} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

et retranchons les équations (15) membre à membre.

Nous obtenons ainsi les six équations suivantes :

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \Sigma_1 - \Sigma_2 = 0, & \Sigma_2 - \Sigma_3 = 0, & \Sigma_3 - \Sigma_4 = 0, \\ \Sigma_4 - \Sigma_1 = 0, & \Sigma_4 - \Sigma_2 = 0, & \Sigma_1 - \Sigma_3 = 0, \end{array} \right.$$

satisfaites par les coordonnées du centre cherché. Trois premières de ces équations entraînent les trois autres.

Pour former le système (17), il faut déterminer les signes des expressions Σ_k. En prenant successivement toutes les combinaisons de signes possibles, on voit, d'après la forme des équations (17), qu'on n'obtiendra que huit systèmes (17) distincts et par conséquent huit sphères tangentes à quatre plans donnés.

Il est facile de se rendre compte de la distribution des huit centres dans l'espace. En effet, l'interprétation géométrique des huit systèmes d'équations (17) nous montre qu'on peut mener, par chaque arête du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, deux plans que nous appellerons *plans bissecteurs*. Ces plans séparent harmoniquement les deux plans du tétraèdre passant par l'arête considérée et chaque centre cherché est intersection commune de six plans bissecteurs. Il est clair qu'il faut associer les douze plans bissecteurs de la manière suivante pour obtenir tous les centres cherchés :

Les six plans bissecteurs intérieurs se coupent en un centre situé à l'intérieur du tétraèdre (nous appelons un plan *bissecteur intérieur* s'il divise le tétraèdre en deux parties).

Trois plans bissecteurs extérieurs qui passent par trois arêtes du tétraèdre formant un triangle et les trois plans intérieurs passant par les autres arêtes se coupent en un point ; nous obtenons ainsi quatre centres.

Deux plans bissecteurs intérieurs passant par deux arêtes opposées du tétraèdre et les quatre plans extérieurs passant par les autres arêtes se coupent en un point ; nous obtenons ainsi trois centres. Considérons par exemple les arêtes B_1B_2 et B_3B_4, en désignant avec B_k le sommet du tétraèdre opposé à la face A_k. Les plans bissecteurs intérieurs se coupent suivant une droite dont les parties extérieures au tétraèdre sont situées dans deux combles.

L'un de ces combles, limités par faces prolongées du tétraèdre, touche au tétraèdre suivant le segment A_1A_2, l'autre suivant le segment A_3A_4 ; l'un ou l'autre contient le centre de la sphère que nous appellerons, d'après M. Kœnigs [1], *sphère du comble* (12, 34). On

---

[1] G. Kœnigs, *Leçons de l'Agrégation classique de Mathématique*, p. 70-79 Paris, 1892.

définira de la même façon la sphère du comble (23, 14) et la sphère du comble (13, 24).

4. Passons maintenant au problème réciproque : *Déterminer les sphères passant par quatre points donnés*

$$M_k(x_k, y_k, z_k, t_k) \qquad (k=1, 2, 3, 4).$$

Nous avons à faire un raisonnement tout à fait analogue à celui du numéro précédent. Les coordonnées du plan d'inscription u', v', w', p' de la sphère cherchée satisfont toujours aux quatre équations

$$(18) \quad x_k u' + y_k v' + z_k w' + t_k p' = \pm\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta t_k^2} \qquad (k=1, 2, 3, 4),$$

ou bien, en posant

$$(19) \qquad S_k = \pm \frac{x_k u' + y_k v' + z_k w' + t_k p'}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta t_k^2}},$$

aux six équations suivantes :

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} S_1 - S_2 = 0, & S_2 - S_3 = 0, & S_3 - S_4 = 0, \\ S_4 - S_1 = 0, & S_4 - S_2 = 0, & S_1 - S_3 = 0. \end{array} \right.$$

Il y a sur chaque arête deux points qui divisent harmoniquement le segment formé par les deux sommets du tétraèdre situés sur l'arête considérée ; les huit plans d'inscription des sphères cherchées coupent chaque arête dans l'un ou l'autre point. Nous pouvons distinguer les huit plans d'inscription de la manière suivante :

Un plan extérieur au tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$;

Quatre plans dont chacun sépare un sommet du tétraèdre de trois autres ;

Trois plans dont chacun sépare deux sommets du tétraèdre de deux autres.

5. Nous appellerons *cercle* l'intersection d'une sphère avec un plan quelconque (P). Il est évident que chaque cercle est tangent en deux points A, A' à la conique (C), intersection de la quadrique absolue (Q) avec le plan (P) du cercle [conique absolue dans le plan (P)].

Le pôle de la droite AA' par rapport à (C) sera dit le *centre* du cercle ; la distance d'un point du cercle au centre est constante.

Un triangle étant donné, on peut lui circonscrire quatre cercles et inscrire quatre cercles.

Remarquons encore que, sur une sphère donnée, il n'y a qu'un cercle passant par trois points donnés.

6. Il est naturel d'appeler *cône de révolution* tout cône circonscrit à une sphère. Chaque cône de révolution ayant pour sommet un point P est inscrit dans le cône absolu (K) du point P, c'est-à-dire au cône tangentiel de la quadrique (Q) ayant le sommet en P. L'intersection des deux plans tangents communs à ces deux cônes a, dans le cône (K), un plan polaire (S) que nous appelons *plan central du cône de révolution*. Ce plan central jouit de la propriété suivante :

Chaque plan tangent d'un cône de révolution fait un angle constant avec le plan central.

Du reste, chaque propriété du cercle a son image dans une propriété du cône de révolution, parce que la transformation par polaires réciproques, (Q) étant directrice, change les cercles en cônes de révolution.

Par exemple, le centre du cercle commun à un plan (P) et à une sphère (Σ) est sur la droite qui joint le centre de (Σ) avec le pôle de (P).

Le plan central d'un cône ayant son sommet en un point M et circonscrit à une sphère (Σ) passe par l'intersection du plan polaire de M avec le plan d'inscription de (Σ).

CHAPITRE II.

7. Nous étudierons dans ce Chapitre une courbe gauche (C) dans le voisinage d'un point O. Soient Ox la tangente et (P) le plan osculateur en O. Nous supposons dans la suite que O soit un point ordinaire,

c'est-à-dire que (C) ait un contact du premier ordre avec Ox et un contact du second ordre avec (P).

Le tétraèdre de référence, conjugué à la quadrique absolue (Q), sera défini par les conditions d'avoir O comme le sommet (o, o, o, 1), (P) comme le plan $z = 0$, et Ox comme l'intersection des plans $y = 0$ et $z = 0$. On peut appeler la droite $x = 0$, $z = 0$ *normale non euclidienne*, et la droite $x = 0$, $y = 0$ *binormale non euclidienne* au point O.

La définition précédente du tétraèdre de référence serait en défaut, si O était situé sur la quadrique (Q) ou si (P) était un plan tangent de (Q); nous excluons ces cas.

Cela posé, divisons les coordonnées homogènes d'un point M situé sur la courbe (C) dans le voisinage de O par la quatrième, et désignons les quotients ainsi obtenus par

$$x, \quad y, \quad z, \quad 1.$$

Si l'on regarde x comme un infiniment petit du premier ordre, y sera un infiniment petit d'ordre 2, et z un infiniment petit d'ordre 3. Par conséquent, la courbe (C) sera définie, dans le voisinage du point O, par les équations suivantes :

$$(21)\qquad \begin{cases} y = ax^2 + a'x^3 + \ldots & (a \neq 0), \\ z = bx^3 + b'x^4 + \ldots & (b \neq 0). \end{cases}$$

L'équation du plan osculateur au point $M(x, y, z, 1)$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ 1 & \dfrac{dy}{dx} & \dfrac{dz}{dx} \\ 0 & \dfrac{d^2 y}{dx^2} & \dfrac{d^2 z}{dx^2} \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant les coefficients en séries et réduisant chaque série à deux premiers termes,

$$(3abx^2 + 8ab'x^3)X - (3bx + bb'x^2)Y + (a + 3a'x)Z - (abx^3 + 3ab'x^4) = 0.$$

On peut diviser la dernière équation par le coefficient de Z, car il reste différent de zéro dans le voisinage du point O. Dans l'équation ainsi obtenue

$$(22) \qquad uX + vY + Z + p = 0,$$

les coefficients u, v, p sont donnés en fonction de x par les séries suivantes :

$$(23) \qquad \begin{cases} u = 3bx^2 + \left(8b' - 9\dfrac{a'b}{a}\right)x^3 + \ldots, \\ v = -3\dfrac{b}{a}x + \left(9\dfrac{a'b}{a^2} - 6\dfrac{b'}{a}\right)x^2 + \ldots, \\ p = -bx^3 + \left(3\dfrac{a'b}{a} - 3b'.\right)x^4 + \ldots. \end{cases}$$

Nous ferons souvent usage des *coordonnées non homogènes* (u, v, p) *du plan* liées avec les coordonnées du point par l'équation (22).

8. Regardons maintenant la courbe (C) comme arête de rebroussement sur la surface développable formée par ses plans osculateurs.

L'inversion de la seconde série (23) donne

$$(24) \qquad x = -\frac{a}{3b}v + \left(\frac{aa'}{3b^2} - \frac{2a^2b'}{9b^3}\right)v^2 + \ldots.$$

En substituant ce développement dans la première et dans la troisième série (23), on trouve les équations

$$(25) \qquad \begin{cases} u = \alpha v^2 + \alpha' v^3 + \ldots & (\alpha \neq 0), \\ p = \beta v^3 + \beta' v^4 + \ldots & (\beta \neq 0), \end{cases}$$

qui sont tout à fait analogues aux équations (21). Il nous sera avantageux d'employer soit les formules (21), soit les formules (25), suivant le sujet traité.

Avant de donner les formules qui expriment les relations entre les équations (21) et (25), remarquons que, pour avoir les expressions des coordonnées x, y, z du point M en fonction de la coordonnée v non homogène de son plan osculateur, il suffit de remplacer dans les formules (23)

$$u, \quad v, \quad p, \quad x, \quad \ldots \qquad \text{par} \qquad y, \quad x, \quad z, \quad v,$$

et

$$a, \quad a' \quad \ldots, \quad b, \quad b', \quad \ldots \qquad \text{par} \qquad \alpha, \quad \alpha', \quad \ldots, \quad \beta, \quad \beta'.$$

On obtient ainsi

$$(26)\quad \begin{cases} x = -3\dfrac{\beta}{\alpha}v + \left(9\dfrac{\alpha'\beta}{\alpha^2} - 6\dfrac{\beta'}{\alpha}\right)v^2, \\ y = 3\beta v^2 + \left(8\beta' - 9\dfrac{\alpha'\beta}{\alpha}\right)v^3, \\ z = \beta v^3 + \left(3\dfrac{\alpha'\beta}{\alpha} - 3\beta'\right)v^4. \end{cases}$$

Pour avoir les coefficients α, α', ... en fonction de a, a', ..., portons le développement (24) dans les équations (23) et comparons les résultats avec (25). Il vient

$$(27)\quad \alpha = \frac{a^2}{3b}, \qquad \beta = \frac{a^3}{27b^3}, \qquad \alpha' = \frac{4a^3b'}{27b^3} - \frac{a^2a'}{3b^2}, \qquad \beta' = \frac{a^4b'}{27b^4} - \frac{2a^3a'}{27b^3}.$$

Il est évident que le même calcul fournira les expressions de α, α', ... en fonction de a, a' ...; il suffit de remplacer les coefficients α, α', ... par a, a', ... et inversement.

Les coefficients dans (21) *sont liés avec les coefficients dans* (25) *par un ensemble d'équations qui ne change pas, si l'on y remplace chaque coefficient* a, a', ..., b, b', ... *figurant dans* (21) *par le coefficient correspondant dans* (25) *et inversement.*

Ce théorème montre en particulier que le système (27) est équivalent au système suivant :

$$(28)\quad a = \frac{\alpha^2}{3\beta}, \qquad b = \frac{\alpha^3}{27\beta^3}, \qquad a' = \frac{4\alpha^3\beta'}{27\beta^3} - \frac{\alpha^2\alpha'}{3\beta^2}, \qquad b' = \frac{\alpha^4\beta'}{27\beta^4} - \frac{2\alpha^3\alpha'}{27\beta^3}.$$

9. Nous allons donner les formules qui expriment les coordonnées des faces du tétraèdre formé par quatre points $M_k(x_k, y_k, z_k)$ de la courbe et formules analogues qui expriment les coordonnées des sommets du tétraèdre formé par quatre plans osculateurs $A_k(u_k, v_k, p_k)$, en désignant par u_k, v_k, p_k les coordonnées non homogènes d'un plan définies dans le numéro précédent.

Pour cela, introduisons les fonctions symétriques suivantes :

$$(29)\quad \begin{cases} \lambda_k = x_l + x_m + x_n, \qquad \mu_k = x_l x_m + x_m x_n + x_n x_l, \qquad \nu_k = x_l x_m x_n, \\ \rho_k = v_l + v_m + v_n, \qquad \sigma_k = v_l v_m + v_m v_n + v_n v_l, \qquad \tau_k = v_l v_m v_n, \end{cases}$$

où k, l, m, n est une permutation quelconque des indices 1, 2, 3, 4.

Le plan $M_l M_m M_n$ est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_l & y_l & z_l & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

où il faut remplacer y_l et z_l par les séries entières en x_l d'après les formules (21).

Le premier membre de cette équation change de signe, si l'on fait subir aux indices l, m, n une transposition quelconque, et il s'évanouirait, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_l & x_l^2 \\ 1 & x_m & x_m^2 \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{vmatrix} = (x_l - x_m)(x_m - x_n)(x_n - x_l)$$

était égal à zéro. Il est donc divisible par ce déterminant et le quotient sera évidemment une fonction *symétrique* des trois variables x_l, x_m, x_n et, par conséquent, exprimable au moyen des trois fonctions fondamentales λ_k, μ_k, ν_k.

En effectuant la transformation qui vient d'être indiquée, on trouve

$$[ab\mu_k + ab'(\lambda_k\mu_k - \nu_k)]X - [b\lambda_k + b'(\lambda_k^2 - \mu_k)]Y + (a + a'\lambda_k)Z - (ab\nu_k + ab'\lambda_k\nu_k) = 0.$$

On n'a conservé, dans chaque coefficient, que les termes du degré le moins élevé (par rapport aux variables x_l, x_m, x_n) et les termes du degré suivant.

Si nous divisons l'équation précédente par le coefficient de Z, le seul qui n'est pas infiniment petit, nous obtenons l'équation du plan $M_l M_m M_n$ sous la forme

$$U_k X + V_k Y + Z + P_k = 0. \tag{30}$$

Les coordonnées non homogènes de ce plan sont données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} U_k &= \quad b\mu_k + \frac{ab' - a'b}{a}\lambda_k\mu_k - b'\nu_k + \ldots, \\ V_k &= -\frac{b}{a}\lambda_k - \frac{ab' - a'b}{a^2}\lambda_k^2 + \frac{b'}{a}\mu_k + \ldots, \\ P_k &= -b\nu_k - \frac{ab' - a'b}{a}\lambda_k\nu_k + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Les coordonnées X_k, Y_k, Z_k du point commun à trois plans osculateurs A_l, A_m, A_n s'obtiendront de la même façon ; il faut partir des développements (25), c'est-à-dire changer les coefficients a, a', ... en α, α', ... et introduire les fonctions ρ_k, σ_k, τ_k au lieu de λ_k, μ_k, ν_k. Nous aurons donc

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} X_k &= -\frac{\beta}{\alpha}\rho_k - \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha^2}\rho_k^2 + \frac{\beta'}{\alpha}\sigma_k + \ldots, \\ Y_k &= \quad \beta\sigma_k + \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha}\rho_k\sigma_k - \beta\tau_k + \ldots, \\ Z_k &= -\beta\tau_k - \frac{\alpha\beta' - \alpha\beta}{\alpha}\rho_k\tau_k + \ldots. \end{aligned}\right.$$

10. Nous passons maintenant à l'étude des sphères inscrites et circonscrites aux tétraèdres formés ou par quatre points infiniment voisins

$$M_k(x_k, y_k, z_k) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

de la courbe (C), ou par quatre plans osculateurs

$$A_k(u_k, v_k, p_k) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

aux points infiniment voisins ; x_k, ... et u_k, ... désignent toujours les coordonnées non homogènes introduites dans le n° 7.

Les deux tétraèdres seront supposés être assez voisins du point O pour que leurs sommets ne soient pas sur la quadrique absolue (Q) et pour que leurs faces ne soient pas tangentes à (Q).

Cette hypothèse étant admise, nous voyons que l'expression

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta$$

conserve toujours le même signe et ne peut jamais s'annuler ; nous représenterons, dans tous les calculs suivants, par $\sqrt{\delta}$ une racine de δ *déterminée* (d'ailleurs quelconque) et par

$$\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta}$$

la racine qui se réduit à $\sqrt{\delta}$ pour $x_k = y_k = z_k = 0$.

Les coordonnées homogènes du plan d'inscription d'une *sphère passant par quatre points* M_k vérifient les quatre équations suivantes (*voir* n° 4) :

$$(33)\qquad x_k u' + y_k v' + z_k w' + p' = \pm\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta} \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

où il faut remplacer y_k et z_k en fonction de x_k d'après (21), et les seconds membres par

$$(33')\qquad \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 + \delta} = \sqrt{\delta} + \frac{x_k^2}{2\sqrt{\delta}} + \ldots$$

Prenons d'abord, dans chacune des équations (33), le même signe, par exemple, le signe $+$. En résolvant le système (33), on trouve

$$u' : v' : w' : p' = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4.$$

Les déterminants $\Delta_1, \ldots$ s'expriment en fonction de x_1, x_2, x_3 et x_4 au moyen des équations suivantes :

$$\Delta_1 = \left| \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \delta} \quad y_1 \quad z_1 \quad 1 \right| = \mathrm{D}\varepsilon_1,$$

$$\Delta_2 = \left| x_1 \quad \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \delta} \quad z_1 \quad 1 \right| = \mathrm{D}\left(\frac{b}{2\sqrt{\delta}} + \varepsilon_2\right),$$

$$\Delta_3 = \left| x_2 \quad y_1 \quad \sqrt{\alpha_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \delta} \quad 1 \right| = \mathrm{D}\left(-\frac{a'}{2\sqrt{\delta}} + \varepsilon_3\right),$$

$$\Delta_4 = \left| x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \delta} \right| = \mathrm{D}(ab\sqrt{\delta} + \varepsilon_4),$$

$$\mathrm{D} = \left| x_1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad 1 \right| = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_1 - x_3),$$

où l'on n'a figuré que la première ligne dans chaque déterminant ; les autres lignes se déduisent de la première en remplaçant x_1 successivement par x_2, x_3, x_4. Les quantités ε_1, ε_2, ε_3 et ε_4, restes des séries infinies de quatre variables x_1, x_2, x_3 et x_4, sont infiniment petites en même temps que celles-ci.

Chaque déterminant est divisible par D, car il s'annulerait si $x_i = x_k$.

Si les quatre points s'approchent indéfiniment du point O, la sphère considérée admet une figure-limite déterminée dont le plan d'inscription sera défini par les équations

$$(34)\qquad \lim u' : \lim v' : \lim w' : \lim p' = 0 : \frac{b}{2\sqrt{\delta}} : -\frac{a'}{2\sqrt{\delta}} : ab\sqrt{\delta}.$$

Le centre de cette figure-limite, c'est-à-dire le pôle du plan précédent par rapport à la quadrique (Q), aura pour coordonnées non homogènes

$$(35) \qquad \xi = 0, \qquad \eta = \frac{1}{2a}, \qquad \zeta = -\frac{a'}{2ab}.$$

Les équations (34) montrent que la figure-limite appartient précisément à la sphère introduite en premier lieu dans l'énumération donnée à la fin du n° 4. Aucune autre sphère passant par les quatre points M_k ne peut admettre aucune figure-limite, lorsque les points M_k s'approchent indéfiniment du point O.

Car le plan d'inscription finirait par contenir le point O (puisqu'il sépare, d'après le n° 4, au moins deux sommets du tétraèdre), ce qui est impossible, chaque point commun à la sphère et à son plan d'inscription étant situé sur (Q); nous écartons, bien entendu, les sphères dégénérées. Nous avons donc le théorème suivant :

Il y a une seule sphère passant par quatre points M_k *de la courbe et admettant une figure-limite déterminée, non dégénérée,* (S_1), *lorsque les points* M_k *s'approchent indéfiniment du point* O. *Les coordonnées du centre de* (S_1) *sont exprimées par les formules* (35).

La figure-limite du cercle passant par trois points de la courbe infiniment voisins du point O se réduit à l'intersection de la sphère (S_1) qui vient d'être définie avec le plan osculateur au point O.

Le centre de ce cercle est sur la droite qui joint le centre de la sphère osculatrice (S_1) avec le pôle du plan osculateur du point O, c'est-à-dire avec le point (0, 0, 1, 0).

On obtient ainsi les coordonnées non homogènes du *centre du cercle osculateur* (C_1)

$$(36) \qquad \xi = 0, \qquad \eta = \frac{1}{2a}, \qquad \zeta = 0.$$

11. *Les sphères tangentes à quatre plans osculateurs* A_k se déterminent de la même façon que les sphères passant par quatre points de la courbe.

En effet, soient u_k, v_k, p_k les coordonnées non homogènes du plan osculateur A_k vérifiant les équations (25). Les coordonnées homogènes x', y', z', t' du centre d'une sphère tangente à quatre plans A_k s'obtiendront, d'après le n° 3, en résolvant le système des quatre équations suivantes :

$$(37) \qquad u_k x' + v_k y' + z' + p_k t' = \pm\sqrt{u_k^2 + v_k^2 + 1 + \frac{1}{\delta} p_k^2};$$

nous ajoutons aux développements (25) le suivant :

$$(37') \qquad \sqrt{1 + u_k^2 + v_k^2 + \frac{1}{\delta} p_k^2} = 1 + \frac{v_k^2}{2} + \ldots.$$

Comparons le système d'équations (21), (33) et (33') qui nous a fourni les formules (34) avec le système d'équations (25), (37) et (37'). Si nous négligeons, dans les formules (21), (33'), (25) et (37'), les termes qui n'y sont pas figurés, le premier système ne diffère pas en réalité du second. En effet, si nous remplaçons, dans le premier système, les quantités

$$a, \quad a', \quad b, \quad b', \quad x_k, \quad y_k, \quad z_k, \quad u', \quad v', \quad w', \quad p', \quad \delta$$

par les quantités suivantes :

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \beta, \quad \beta', \quad v_k, \quad v_u, \quad p_k, \quad y', \quad x', \quad t', \quad z', \quad 1,$$

il devient identique avec le second système.

Or, si les quatre plans osculateurs A_k s'approchent indéfiniment du plan osculateur au point O, les formules (34) montrent qu'on aura

$$\lim x' : \lim y' : \lim z' : \lim t' = \frac{1}{2\alpha} : 0 : 1 : -\frac{\alpha'}{2\alpha\beta}.$$

Les coordonnées non homogènes du centre de la figure-limite (S_2) sont données par les formules suivantes :

$$(38) \qquad \xi = -\frac{\beta}{\alpha'}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = -\frac{2\alpha\beta}{\alpha'}.$$

Cette figure-limite correspond au cas où l'on a pris, dans chacune des équations (37), le second membre avec le signe +. D'autres combinaisons des signes conduisent aux sept sphères inscrites qui n'admettent pas des figures-limites non dégénérées ([1]).

([1]) *Voir* la remarque à la fin du n° 16.

Il faut encore, pour préciser ce résultat, répondre à la question suivante : *Comment trouvera-t-on, parmi les huit sphères inscrites, celle qui admet la figure-limite* (S_2)?

Imaginons que les points $M_k(x_k, y_k, z_k)$ dont A_k sont les plans osculateurs s'approchent indéfiniment du point O d'une façon quelconque. Nous convenons de choisir, à chaque instant, les indices 1, 2, 3, 4 de telle manière qu'on ait toujours

$$(39) \qquad x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Si les points M_k sont assez voisins du point O, les inégalités précédentes entraînent, en vertu de la seconde équation (23), les inégalités suivantes :

$$(40) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} v_1 < v_2 < v_3 < v_4, & \text{si} & \dfrac{\beta}{\alpha} < 0, \\ \text{ou} & & \\ v_4 < v_3 < v_2 < v_1, & \text{si} & \dfrac{\beta}{\alpha} > 0. \end{array} \right.$$

Les inégalités (39) ou (40) expriment, en réalité, que (si les points M_k sont assez voisins du point O), en parcourant la courbe dans un sens convenable, on rencontre les points M_k dans l'ordre d'indices croissants.

Cela posé, introduisons les expressions

$$(41) \qquad \Sigma_k = +\frac{u_k X + v_k Y + Z + p_k}{\sqrt{1 + u_k^2 + v_k^2 + \frac{1}{9} p_k^2}} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Les quatre équations $\Sigma_k = -1$ coïncident avec les équations (37) si l'on pose X, Y, Z, 1 au lieu de x', y', z', t'. Les coordonnées non homogènes X, Y, Z du centre de la sphère qui admet la figure-limite définie par les formules (38) vérifient, par conséquent, les six équations suivantes :

$$\Sigma_i - \Sigma_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Je dis que les équations

$$(42) \qquad \Sigma_1 - \Sigma_4 = 0, \qquad \Sigma_2 - \Sigma_3 = 0$$

représentent deux plans bissecteurs *intérieurs*, l'un passant par l'intersection des faces A_1 et A_3, l'autre par l'arête opposée du tétraèdre; en d'autres mots, (XYZ) est le centre de la sphère du comble (13, 24) (*voir* n° 3).

Prenons, par exemple, la première équation (42). Elle ne peut représenter le plan bissecteur intérieur que si Σ_1 et Σ_3 ont *le même signe*, lorsqu'on y remplace X, Y et Z par les coordonnées d'un point quelconque B situé à l'intérieur du tétraèdre. Mais le signe de Σ_k ne change pas, lorsque B se confond avec le sommet opposé à la face A_k; car Σ_k ne s'annule que si B était situé dans la face A_k.

Par conséquent, tout revient à démontrer les inégalités suivantes :

$$(\Sigma_1)(\Sigma_3) > 0, \qquad (\Sigma_2)(\Sigma_4) > 0, \tag{43}$$

en désignant par (Σ_k) ce qui devient Σ_k, si l'on y remplace X, Y, Z par X_k, Y_k, Z_k [formules (32)].

On obtient

$$(\Sigma_k) = \beta(-v_k^2\rho_k + v_k\sigma_k - \tau_k + v_k^3) + \ldots = \beta(v_k - v_l)(v_k - v_m)(v_k - v_n)(1 + \varepsilon_k),$$

ε_k étant infiniment petit. De là résultent, en effet, les inégalités (43), les quantités v_k vérifiant les inégalités (40).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Parmi les huit sphères tangentes à quatre plans osculateurs A_1, A_2, A_3, A_4 *infiniment voisins du plan* $z = 0$, *la seule qui appartient au comble* (13, 24) *admet une figure-limite déterminée* (S_2). *Les coordonnées du centre de* (S_2) *sont définies par les formules* (38).

La figure-limite d'un cône de révolution tangent à trois plans osculateurs infiniment voisins de $z = 0$ se réduit au cône tangentiel de la sphère (S_2) ayant son sommet en O. Le plan central de ce *cône osculateur* (K_1) passe par la droite d'intersection du plan $t = 0$ avec le plan d'inscription de la sphère (S_2) et a pour coordonnées non homogènes

$$u = \frac{1}{2\alpha}, \qquad v = 0, \qquad p = 0. \tag{44}$$

12. Pour déterminer le centre d'une *sphère inscrite au tétraèdre* M_1, M_2, M_3, M_4, il faut résoudre le système des quatre équations

suivantes :

$$(45)\qquad U_k x' + V_k y' + z' + P_k t' = \pm\sqrt{U_k^2 + V_k^2 + 1 + \tfrac{1}{6}P_k^2},$$

où les quantités U_k, V_k, P_k sont données par les formules (31).

La résolution s'effectue comme dans le n° 10.

En supposant qu'on prenne, dans les équations (45), toujours la valeur du radical qui se réduit à $+1$ pour $U_k = V_k = P_k = 0$, on trouve

$$x' : y' : z' : t' = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4.$$

Les déterminants Δ_i, qui sont divisibles tous par le déterminant suivant :

$$(46)\quad \begin{aligned} D = |\, x_1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad 1 \,| &= |\, \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \nu_1 \quad 1 \,| = |\, \lambda_1 \quad \lambda_1^2 \quad \nu_1 \quad 1 \,| \\ = |\, \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \lambda_1^3 \quad 1 \,| &= |\, \lambda_1 \quad \lambda_1^2 \quad \lambda_1\mu_1 \quad 1 \,| = |\, \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \lambda_1\mu_1 \quad 1 \,| \end{aligned}$$

sont donnés par les formules suivantes :

$$\Delta_1 = D\left(\frac{b^4}{2a^3} + \eta_1\right),\qquad \Delta_2 = D\eta_2,\qquad \Delta_3 = D\left(\frac{b^3}{a} + \eta_3\right),\qquad \Delta_4 = D\left(\frac{b^4 a'}{2a^4} + \eta_4\right),$$

où η_1, ... sont infiniment petits.

Si les points M_k s'approchent indéfiniment du point O, la sphère admettra une figure-limite (S_3) dont le centre aura les coordonnées non homogènes

$$(47)\qquad \xi = \frac{a}{a'},\qquad \eta = 0,\qquad \zeta = \frac{2a^3}{ba'}.$$

On démontre, comme dans le numéro précédent, que la figure-limite ainsi obtenue convient précisément à la sphère du comble (13, 24), les inégalités (39) étant satisfaites (¹).

Le cône tangentiel (K_2) de la sphère (S_3) pour sommet représente la figure-limite du cône de révolution tangent aux trois plans OM_1M_2, OM_2M_3 et OM_3M_1. Les coordonnées non homogènes du plan central de (K_2) sont

$$(48)\qquad u = \frac{a}{a'},\qquad v = 0,\qquad p = 0.$$

(¹) *Voir* la remarque dans le n° 16.

13. Les coordonnées (u', v', w', p') du plan d'inscription d'une sphère *circonscrite au tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$ vérifient le système

$$X_k u' + Y_k v' + Z_k w' + p' = \pm\sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2 + \delta}, \tag{49}$$

où les X_k, Y_k, Z_k sont donnés par les formules (32).

Si l'on prend chaque radical avec le même signe, on trouve ici encore une figure-limite (S_4) qui a pour centre le point

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{\beta}{2\alpha^2}, \qquad \zeta = \frac{\alpha'\beta}{2\alpha^3}. \tag{50}$$

L'intersection de cette sphère avec le plan osculateur $z = 0$ représente la figure-limite du cercle (C_2) circonscrit au triangle formé, dans le plan $z = 0$, par les traces de trois plans osculateurs infiniment voisins. Les coordonnées du centre de (C_2) sont

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{\beta}{2\alpha^2}, \qquad \zeta = 0. \tag{51}$$

Les sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ se confondent en O lorsque les plans osculateurs A_i se confondent avec le plan $z = 0$.

Nous en concluons, comme dans le n° 10, qu'il n'y peut avoir aucune sphère-limite circonscrite en dehors de (S_4); par conséquence, la figure-limite (C_2) du cercle est elle-même déterminée sans ambiguïté.

14. Rappelons enfin les quatre figures-limites suivantes, en désignant par M_k trois points de la courbe infiniment voisins du point O, et par A_k trois plans osculateurs infiniment voisins du plan $z = 0$:

Cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$. La figure-limite (C_3) a pour centre le point

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{2}{a}, \qquad \zeta = 0. \tag{52}$$

Cône de révolution circonscrit au trièdre $A_1A_2A_3$. La figure-limite (K_3) a pour plan central le plan (coordonnées non homogènes)

$$u = \frac{2}{\alpha}, \qquad v = 0, \qquad p = 0. \tag{53}$$

Cercle inscrit dans le triangle ayant pour côtés les traces de A_1, A_2 et A_3 dans le plan $z = 0$. Centre de la figure-limite (C_1) :

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{2}{3a}, \quad \zeta = 0. \tag{54}$$

Cône de révolution dont OM_1, OM_2 et OM_3 sont trois génératrices. Plan central de la figure-limite (K_1) :

$$u = \frac{2}{3\alpha}, \quad v = 0, \quad p = 0. \tag{55}$$

On sait qu'il y a quatre cercles inscrits dans un triangle (ou circonscrits à un triangle) et qu'il y a quatre cônes de révolution circonscrits à un trièdre (ou inscrits dans un trièdre); cependant, dans chacun des cas que nous avons considérés, il n'y a qu'une seule figure-limite.

CHAPITRE III.

15. Supposons maintenant que la quadrique (Q) soit une sphère ordinaire et que le trièdre $Oxyz$ trirectangle soit formé par la tangente, la normale principale et la binormale de la courbe (C) au point O. Si le rayon $\sqrt{-\delta}$ de la sphère (Q) devient infini, les sphères, cercles et cônes de révolution non euclidiens se changent en sphères, etc. ordinaires.

On s'assure facilement que, dans ce cas limite, les développements analytiques du Chapitre précédent subsistent sans aucune modification; en particulier, les formules relatives aux différentes figures-limites restent inaltérées, pourvu que les coordonnées cartésiennes x, y, z du point soient liées avec les coordonnées non homogènes (u, v, p) du plan par l'équation

$$ux + vy + z + p = 0. \tag{22}$$

Nous donnerons, dans les numéros suivants, la liste de douze figures déterminées par des éléments consécutifs de la courbe; pour cela, il faut introduire la signification géométrique des coefficients dans les équations de la courbe

$$(21)\qquad \begin{cases} y = a x^2 + a' x^3 + \dots & (a \neq 0), \\ z = b x^3 + b' x^4 + \dots & (b \neq 0). \end{cases}$$

Représentons par R, T, $\frac{dR}{ds}$, $\frac{dT}{ds}$ le rayon de la courbure, le rayon de la torsion au point O et leurs dérivées par rapport à l'arc s au même point. Si le sens positif de l'arc coïncide en O avec la direction Ox, on aura

$$(56)\qquad \begin{cases} 2a = \dfrac{1}{R}, \qquad 6a' = -\dfrac{1}{R^2}\dfrac{dR}{ds}, \qquad 6b = -\dfrac{1}{RT}, \\ 24 b' = \dfrac{1}{R^2 T^2}\left(2T\dfrac{dR}{ds} + R\dfrac{dT}{ds}\right). \end{cases}$$

En prenant, au lieu de x, la coordonnée v du plan osculateur pour paramètre, la courbe (C) ou plutôt la développable engendrée par le plan osculateur de (C) sera représentée par les équations suivantes :

$$(25)\qquad \begin{cases} u = \alpha v^2 + \alpha' v^3 + \dots & (\alpha \neq 0), \\ p = \beta v^3 + \beta' v^4 + \dots & (\beta \neq 0), \end{cases}$$

où les coefficients α, α', ... s'expriment en fonction de a, a', ... au moyen des équations (27). Pour obtenir des expressions parfaitement analogues aux expressions (56), introduisons les notations suivantes :

$$R_1 = -\frac{R}{T}, \qquad T_1 = \frac{1}{T}, \qquad d\tau = \frac{ds}{T} = T_1\, ds,$$

τ étant l'angle de deux plans osculateurs.

Il vient

$$(57)\qquad \begin{cases} 2\alpha = \dfrac{1}{R_1}, \qquad 6\alpha' = -\dfrac{1}{R_1^2}\dfrac{dR_1}{d\tau}, \qquad 6\beta = -\dfrac{1}{R_1 T_1}, \\ 24\beta' = \dfrac{1}{R_1^2 T_1^2}\left(2T_1\dfrac{dR_1}{d\tau} + R_1\dfrac{dT_1}{d\tau}\right). \end{cases}$$

On voit donc qu'il suffit de remplacer, dans les formules (56),

$$R, \quad T, \quad s \qquad \text{par} \qquad -\frac{R}{T}, \quad \frac{1}{T}, \quad \tau$$

pour obtenir les formules (57).

16. Soient $M_k(x_k, y_k, z_k)$ quatre points de la courbe, $A_k(u_k, v_k, p_k)$ quatre plans osculateurs, et supposons qu'on ait toujours

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, \tag{39}$$

ce qui entraîne (*voir* n° 11) les inégalités

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{lll} v_1 < v_2 < v_3 < v_4, & \text{si} & T > 0, \\ \text{ou} & & \\ v_4 < v_3 < v_2 < v_1, & \text{si} & T < 0. \end{array}\right.$$

En faisant

$$\lim x_k = 0, \qquad \lim v_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

nous obtenons les *sphères* suivantes [formules (35), (38), (47) et (51)] dont la première et la quatrième passent par O, tandis que la seconde et la troisième touchent le plan osculateur (P) du point O :

Sphère (S_1) passant par quatre points M_k, ou sphère osculatrice. Coordonnées du centre :

$$\xi = 0, \qquad \eta = R, \qquad \zeta = -T\frac{dR}{ds}.$$

Sphère (S_2) tangente à quatre plans osculateurs A_k :

$$\xi = \frac{T}{R}\frac{ds}{d\left(\frac{T}{R}\right)}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = -\frac{T^2}{R^2}\frac{ds}{d\left(\frac{T}{R}\right)}.$$

Sphère (S_3) inscrite dans le tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$:

$$\xi = -3R\frac{ds}{dR}, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 9T\frac{ds}{dR}.$$

Sphère (S_4) circonscrite au tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$:

$$\xi = 0, \qquad \eta = \frac{R}{3}, \qquad \zeta = \frac{1}{9}\left(R\frac{dT}{ds} - T\frac{dR}{ds}\right).$$

Remarque. — Nous avons vu, dans les nos 11 et 12, que les figures-limites (S_2) et (S_3) proviennent toujours de la sphère du comble (13, 24). On peut directement se rendre compte de ce fait que, lorsque le tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$ se déforme de la manière indiquée, aucune autre sphère inscrite ne peut admettre une figure limite non dégénérée.

En effet, imaginons que les points M_k soient très voisins du point O et rappelons-nous les propriétés suivantes de la courbe : 1° elle traverse le plan osculateur $z=0$; 2° sa projection dans le plan $z=0$ a la forme d'une parabole tangente à Ox en O; 3° les arêtes M_iM_k du tétraèdre font un angle infiniment petit avec Ox. Un examen attentif de la figure montre que six plans bissecteurs des faces du tétraèdre se confondent sensiblement avec le plan rectifiant Ozx, à savoir : les plans bissecteurs intérieurs relatifs aux arêtes M_1M_3 et M_2M_4, et les plans bissecteurs extérieurs relatifs aux autres arêtes. Le point de concours N de ces six plans n'est autre chose que le centre de la sphère inscrite appartenant au comble (13, 24); par suite, N peut admettre comme point-limite un point situé dans le plan rectifiant, et il n'est pas nécessaire que la sphère-limite soit dégénérée en un point. Au contraire, les six autres plans bissecteurs se confondent sensiblement avec le plan osculateur Oxy. Le centre N' de chaque sphère inscrite, autre que celle qui vient d'être considérée, est situé au moins dans un de ces plans; par conséquent, N' ne peut admettre comme point-limite qu'un point situé dans le plan Oxy; en d'autres mots, la sphère-limite correspondante sera nécessairement dégénérée puisqu'elle touche le plan Oxy.

Le raisonnement précédent, ainsi qu'un raisonnement analogue relatif aux sphères inscrites dans le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, s'appliquerait aussi aux sphères non euclidiennes.

17. Continuons la liste de différentes figures-limites.

Les formules (36), (51), (52) et (54) montrent l'existence de quatre *cercles* qui touchent la tangente Ox en O et dont les centres sont sur la normale principale Oy. Les coordonnées η des centres sont toutes positives; chaque cercle sera parfaitement déterminé par son rayon ρ.

Cercle passant par trois points M_1, M_2, M_3, ou cercle osculateur, intersection de la sphère (S_1) avec le plan Oxy :

$$\rho = R.$$

Cercle circonscrit au triangle Δ formé, dans le plan Oxy, par les traces des plans A_1, A_2 et A_3 [intersection de la sphère (S_4) avec le plan Oxy] :

$$\rho = \frac{R}{3}.$$

Cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$:

$$\rho = 4R.$$

Cercle inscrit dans le triangle Δ :

$$\rho = \frac{4}{3}R.$$

Enfin, les formules (44), (48), (53) et (55) définissent quatre *cônes de révolution* qui ont les sommets en O et qui touchent le plan Oxy suivant O_k. Chaque cône sera parfaitement déterminé par la cotangente de l'angle φ que fait son axe avec Ox. L'équation du plan central (plan perpendiculaire à l'axe du cône) qui passe par la normale principale Oy s'écrit

$$ux + z = 0, \qquad u = \cot\varphi.$$

Cône tangent à trois plans osculateurs A_1, A_2, A_3, ou *cône osculateur* (1), circonscrit à la sphère (S_2) :

$$\cot\varphi = -\frac{R}{T}.$$

Cône tangent aux trois plans OM_1M_2, OM_2M_3 et OM_3M_4, ou cône circonscrit à la sphère (S_3) :

$$\cot\varphi = -\frac{1}{3}\frac{R}{T}.$$

Cône circonscrit au trièdre formé par trois plans osculateurs A_1, A_2 et A_3 :

$$\cot\varphi = -4\frac{R}{T}.$$

Cône dont trois génératrices sont OM_1, OM_2, OM_3 (2) :

$$\cot\varphi = -\frac{4}{3}\frac{R}{T}.$$

---

(1) Ce cône a été considéré par Saint-Venant (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXX, 1845, p. 42).

(2) M. Scheffers a considéré ce cône à un autre point de vue. Voir *Einführung in die Theorie der Curven*, p. 260. Leipzig, 1901.

18. Les quatre cônes correspondent aux quatre cercles d'après le principe de dualité qui exige qu'on envisage la courbe de deux manières : soit comme lieu du point, soit comme enveloppe du plan osculateur. Il suffit de remplacer, dans la formule qui donne le rayon ρ du cercle, la quantité R par $-\frac{R}{T}$ pour obtenir la valeur de $\cot\varphi$ relative au cône correspondant.

L'analogie entre ces deux quantités paraît mériter notre attention. Le principe de dualité nous impose cette analogie. Car, si nous regardons la courbe des deux manières mentionnées, l'angle $d\tau$ de deux plans osculateurs infiniment voisins correspond à la distance ds de deux points infiniment voisins de la courbe, l'angle $d\sigma$ de deux tangentes infiniment voisines (que nous regardons comme droites concourantes) correspond à lui-même, et l'on a

$$R = \frac{ds}{d\sigma}, \qquad \frac{R}{T} = \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Le cône osculateur (dont l'axe est la droite rectifiante) offre une analogie complète avec le cercle osculateur ; et c'est précisément le plan perpendiculaire à son axe au sommet O (que nous avons nommé *plan central*) qui est, d'après le principe de dualité, tout à fait analogue au centre de courbure.

Les expressions des quantités R et $\frac{R}{T}$, en fonctions de différentielles des coordonnées, renferment une même racine carrée qui disparaît dans leur quotient T.

19. Je vais donner encore un petit théorème sur le quotient du volume V du tétraèdre formé par quatre points M_k de la courbe infiniment voisins et du volume V′ du tétraèdre formé par quatre plans osculateurs A_k aux points M_k.

Les formules (32) expriment les coordonnées X_k, Y_k, Z_k des sommets du dernier tétraèdre au moyen des fonctions symétriques ρ_k, σ_k, τ_k des v_k [*voir* (29)].

En éliminant v_k, d'après la seconde équation (23), on obtient des expressions qui ne renferment que les fonctions symétriques

$$\lambda_k = x_l + x_m + x_n, \qquad \mu_k = x_l x_m + x_m x_n + x_n x_l, \qquad \nu_k = x_l x_m x_n,$$

à savoir

$$X_k = \frac{\lambda_k}{3} + \ldots, \qquad Y_k = \frac{a}{3}\mu_k + \ldots, \qquad Z = b\nu_k + \ldots.$$

Les volumes V, V' sont donnés par les formules

$$6V = |\, x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad 1 \,| = |\, x_1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad 1 \,|\,(ab + \varepsilon),$$

$$6V' = |\, X_1 \quad Y_1 \quad Z_1 \quad 1 \,| = |\, \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \nu_1 \quad 1 \,|\left(\frac{ab}{9} + \varepsilon'\right),$$

ε, ε' étant infiniment petits en même temps que les x_k.

Si l'on fait $\lim x_k = 0\,(k = 1, 2, 3, 4)$, l'identité suivante, rencontrée déjà dans le n° 12,

$$|\, x_1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad 1 \,| \equiv |\, \lambda_1 \quad \mu_1 \quad \nu_1 \quad 1 \,|$$

montre que

$$\lim \frac{V}{V'} = 9.$$

CHAPITRE IV.

20. Dans les considérations précédentes, le principe de dualité a joué un rôle assez important; nous allons donner, dans ce dernier Chapitre, une autre application de ce principe. Pour cela, nous considérons, dans la Géométrie non euclidienne, une relation entre deux propriétés métriques des surfaces réglées; nous trouverons ainsi l'origine commune de deux théorèmes bien connus de la Géométrie ordinaire.

Nous commençons par le théorème suivant :

Deux trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée (R) *coupent chaque génératrice g en deux points* M *et* M' *dont la distance demeure invariable.*

Pour démontrer ce théorème, prenons l'équation de la quadrique (Q) sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Nous désignons par x, y, z les coordonnées du point M qui décrit la première trajectoire (C) et par x', y', z' celles du point M′ qui décrit la seconde trajectoire (C′). On exprime que MM′ est invariable en égalant à zéro la différentielle du rapport anharmonique r défini par l'équation (3), où il faut poser $t = t' = 1$ et $\delta = 1$. Cela donne

$$A(x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1) + A'(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} A = {} & (x^2 + y^2 + z^2 + 1)(x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz) \\ & - (xx' + yy' + zz' + 1)(x\,dx + y\,dy + z\,dz), \\ A' = {} & (x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1)(x\,dx' + y\,dy' + z\,dz') \\ & - (xx' + yy' + zz' + 1)(x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz'). \end{aligned}$$

Le théorème sera démontré, si nous prouvons que les expressions A et A′, égalées à zéro, représentent les conditions pour que la génératrice MM′ soit conjuguée respectivement à la tangente t de (C) au point M et à la tangente t' de (C′) au point (M′). La formule (11) (avec $\delta = 1$) montre qu'il en est ainsi, car les coordonnées homogènes p_{ik} des droites MM′, t, t' sont respectivement

$$\begin{array}{llllll} x' - x, & y' - y, & z' - z, & yz' - y'z, & zx' - z'x, & xy' - x'y; \\ dx, & dy, & dz, & y\,dz - z\,dy, & z\,dx - x\,dz, & x\,dy - y\,dx, \\ dx', & dy', & dz', & y'\,dz' - z'\,dy', & z'\,dx' - x'\,dz', & x'\,dy' - y'\,dx'. \end{array}$$

21. Considérons maintenant la figure polaire réciproque de la précédente, la quadrique (Q) étant directrice. (R) devient une nouvelle surface réglée (R_1); par chaque génératrice g_1 de (R_1) passent deux plans (M_1) et (M'_1) qui font un angle constant; les caractéristiques t_1 et t'_1 des deux surfaces développables engendrées par (M_1) et par (M'_1) sont conjuguées à g_1. Donc :

Soit (R_1) *une surface réglée donnée, et construisons une surface développable* (D) *satisfaisant aux conditions suivantes : chaque plan* (M_1) *de* (D) *passe par une génératrice* g_1 *de* (R_1) *et la caractéristique de* (M_1) *coupe* g_1 *à angle droit. En faisant tourner* *chaque plan* (M_1) *autour de la génératrice* g_1 *située dans* (M_1) *d'un angle constant quelconque, on aura une nouvelle développable satisfaisant aux mêmes conditions.*

Il est facile à vérifier que ce théorème reste vrai dans la Géométrie ordinaire.

Cherchons à déterminer ce qui se passe, lorsque la surface (R), considérée dans le numéro précédent, est développable; la figure réciproque (R_1) sera par conséquent une courbe gauche. La tangente t d'une trajectoire orthogonale qui coupe la génératrice g est située dans le plan tangent de (R) qui passe par g; par suite, la droite t_1 correspondante qui coupe la tangente g_1 de la courbe (R_1) à l'angle droit passe précisément par le point de contact de g_1 avec la courbe (R_1). En d'autres termes, la droite t_1 est une normale de la courbe (R_1) et nous retrouvons ainsi le théorème sur les surfaces développables formées par les normales d'une courbe gauche, bien connu dans la Géométrie ordinaire.

22. Enfin, considérons le théorème de Joachimsthal sur l'intersection de deux surfaces suivant une ligne de courbure commune.

La définition des lignes de courbure dans la Géométrie non euclidienne ne diffère pas de la définition ordinaire : la normale de la surface suivant une ligne de courbure engendre une surface développable [1].

On sait que le théorème de Joachimsthal n'est qu'une simple conséquence du théorème sur les développables formées par les normales d'une courbe gauche; par conséquent, il reste vrai dans la Géométrie non euclidienne.

Transformons maintenant la figure, formée par deux surfaces qui se coupent suivant une ligne de courbure commune, par polaires réciproques, la quadrique Q étant directrice. Nous obtenons ainsi le théorème suivant, analogue au théorème de Joachimsthal :

Soient (S) *et* (S') *deux surfaces telles que le segment compris*

---

[1] *Voir* la Note V dans l'Ouvrage de M. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*

sur chaque génératrice g de la surface développable (D) *circonscrite à* (S) *et* (S′), *entre les points de contact de* (D) *avec* (S) *et* (S′), *ait une longueur constante. Pour que la courbe de contact de* (D) *avec* (S) *soit une ligne de courbure sur* (S), *il faut et il suffit que la courbe de contact de* (D) *avec* (S′) *soit une ligne de courbure sur* (S′).

Ce théorème reste vrai dans la Géométrie ordinaire. Car, si la première courbe de contact est une ligne de courbure sur (S), elle l'est sur (D) en vertu du théorème de Joachimsthal; elle sera donc une trajectoire orthogonale des génératrices. Par conséquent, la seconde courbe de contact sera aussi une trajectoire orthogonale des génératrices g, c'est-à-dire une ligne de courbure commune à (D) et à (S′). Si la surface (S) se réduit à une sphère, la première courbe de contact sera toujours une ligne de courbure sur (S); nous obtenons ainsi un théorème analogue au théorème sur les lignes de courbure sphériques.

PREMIER MÉMOIRE.

Sur l'application du calcul fonctionnel à l'étude d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre;

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

INTRODUCTION.

Je rappelle d'abord, rapidement, quel a été le développement des théories auxquelles je voudrais apporter quelques compléments.

Soit une équation du *second* ordre, linéaire, à deux variables,

$$s + ap + bq + cz + f = 0; \tag{1}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}; \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}; \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y};$$

a, b, c, f dépendent de x et y seuls.

Riemann [1] avait résolu le problème de Cauchy pour une équation de ce type, mais plus simple; M. Darboux [2] a étendu la méthode de Riemann à l'équation (1).

M. Picard [3], dans des travaux immédiatement devenus classiques, et par l'emploi des approximations successives, a intégré l'équation (1)

---

(1) *Œuvres*, trad. française (Gauthier-Villars).

(2) *Leçons sur les surfaces*, t. II, 1889.

(3) *Journal de Mathématiques*, 1890 et 1893; Note dans les *Leçons* de M. Darboux, t. IV, 1896; *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1899; *Société mathématique de France*, 1894.

et même celle-ci, plus générale,

$$s = f(x, y, z, p, q). \tag{2}$$

Les données de Cauchy, z et une dérivée première, sont portées par un arc de courbe, dans le plan (x, y), coupé en *un seul point* par une parallèle quelconque aux axes.

Ou bien encore on peut se donner z seul si cet arc de courbe est formé par des droites parallèles aux axes, des caractéristiques.

Ceci n'est déjà plus *le problème de Cauchy*.

M. Picard s'en éloigne encore davantage en se donnant z sur l'axe ox et sur la bissectrice $y = x$.

MM. Goursat et Hadamard étendent considérablement ces résultats.

Pour des équations du second ordre, de forme très générale, M. Goursat montre d'abord qu'il existe une solution *analytique* contenant deux courbes tangentes respectivement aux deux directions caractéristiques, en leur point d'intersection.

Puis il montre qu'il suffit que l'*une* de ces deux courbes soit tangente à une caractéristique [1].

Enfin, par la solution d'une équation fonctionnelle, M. Goursat, dans deux Mémoires [2] du plus grand intérêt, obtient une solution de l'équation (2), contenant deux courbes qui se coupent à l'origine et qui ont leurs projections situées dans le premier quadrant.

Si ces deux projections ne sont pas situées dans le même quadrant, on a alors à se poser des problèmes nouveaux, comme M. Picard l'a remarqué.

M. Hadamard a apporté ici des résultats importants et a appelé *problème mixte* celui où l'on a, sur une portion de courbe, les données de Cauchy et, sur une autre partie, des données autres [3].

On rencontre, dans cet ordre d'idées, des *prolongements non analytiques*, très naturels.

Le présent Mémoire se relie aux travaux de M. Goursat, mais est relatif aux équations du *troisième* ordre.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1895 et 1897, et *Leçons sur les équations du second ordre* (Hermann).

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. V et VI.

(3) *Soc. math. de France*, t. XXVIII, XXXI, XXXII.

Récemment, M. E. Holmgren [1] a brillamment étendu la méthode de Riemann aux équations du troisième ordre du type

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}u = \varphi_2(u),$$

φ_2 contenant des dérivées premières et secondes.

Je me propose d'étudier la même équation en posant, non plus le problème de Cauchy, mais celui-ci : *trouver une solution contenant trois courbes données.*

J'ai à résoudre, non plus *une équation fonctionnelle*, mais un *système fonctionnel.*

Supposons d'abord que les courbes données se projettent sur le plan xOy suivant les courbes planes.

Dans ce cas, le système fonctionnel peut être ramené à une équation unique et l'on trouve que le problème peut comporter des *conditions de possibilité.*

On est ramené à l'étude d'une équation transcendante très intéressante.

Si maintenant on a une donnée plane et deux données gauches (ce qui est un cas suffisamment général), alors le *système fonctionnel* ne paraît pas pouvoir être réduit à *une équation unique.* Il faudra procéder autrement.

J'ai, pour ce cas, montré comment on formera les *conditions de possibilité,* et je continuerai cette étude dans un second Mémoire.

Comme on pouvait s'y attendre, le cas où a est *nul* est infiniment plus simple que le cas où a est *constant.*

Le cas où a est une fonction de x et y est encore un peu plus compliqué.

On sait que M. Picard a, le premier, appliqué au calcul fonctionnel ses méthodes d'approximations successives [2].

---

(1) *Arkiv for Matematik*, Stockholm, 1904 et 1909. Je me permets de renvoyer le lecteur à mon Volume de la collection *Scientia* et à mes *Exercices et Leçons d'Analyse* (Gauthier-Villars). Signalons ici les travaux de MM. Delassus, Le Roux, etc.

(2) *Acta mathematica*, t. XVIII et XXIII.

Je montre qu'on pourra avantageusement les faire intervenir ici, pour l'étude de mes équations fonctionnelles.

Bien entendu, les approximations successives s'imposeront si nous voulons étudier la même équation avec un second membre contenant des dérivées d'ordre *un* et *deux* [1].

Mes premiers résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 22 mars 1909.

Recherche d'une solution générale de l'équation aux dérivées partielles. — Cherchons une solution, avec le maximum d'arbitraire, pour l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}u = f(x, y).$$

Posons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{V},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial y} = f(x, y),$$

d'où, comme il est bien connu,

$$\mathrm{V}(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(x', y')\,dx'\,dy' + \mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(y).$$

Maintenant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{V}(x, y)$$

donne de suite

$$u = \mathrm{H}(y) + \int_0^x \mathrm{V}(\xi, y)\,d\xi,$$

$$\mathrm{V}(\xi, y) = \int_0^\xi \int_0^y f(x', y')\,dx'\,dy' + \mathrm{F}(\xi) + \mathrm{G}(y);$$

---

[1] Nous devons mentionner la thèse de M. Leau, sur les systèmes fonctionnels, mais ses beaux résultats n'ont pu nous servir ici. Signalons enfin l'introduction, dans ces questions, d'*équations intégrales* voisines de celles de M. Volterra : *Voir* E. PICARD, *Comptes rendus*, 1907, et A. MYLLER, *Société des Sciences de Bucarest*, 1908.

d'où, enfin,

$$u(x, y) = \mathrm{H}(y) + \mathrm{L}(x) + x\,\mathrm{G}(y) + \int_0^x d\xi \int_0^\xi dx' \int_0^y f(x', y')\,dy',$$

ayant posé

$$\mathrm{L}(x) = \int_0^x \mathrm{F}(\xi)\,d\xi.$$

Ce qui donne, bien entendu,

$$\mathrm{L}(0) = 0.$$

Si nous voulons que u soit *nul* à l'origine, il faut avoir aussi

$$\mathrm{H}(0) = 0.$$

Traitons le même problème pour l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}u = f(x, y) \qquad (a = \text{const.}),$$

Soit, d'abord,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \mathrm{V}.$$

Les caractéristiques sont données par

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{a} = \frac{du}{\mathrm{V}};$$

V est connu comme précédemment.

Nous avons une intégrale première

$$y - ax = \mathrm{C}_1.$$

Posons

$$\mathrm{V}(x, ax + \mathrm{C}_1) = \mathrm{W}_x \quad (^1);$$

il vient alors

$$du = \mathrm{W}_x\,dx,$$

$$u - \int_0^x \mathrm{W}_\xi\,d\xi = \mathrm{C}_2;$$

(1) Nous écrirons parfois W_x au lieu de $\mathrm{W}(x)$.

alors, $\mathcal{F}$ étant le symbole d'une fonction arbitraire,

$$u - \int_0^x W_\xi \, d\xi = \mathcal{F}(y - ax);$$

voilà la solution cherchée u.

V contient deux arbitraires : F et G.

Donc

$$W_x = \text{fonction connue} + F_x + G(ax + C_1),$$

$$\int_0^x W_\xi \, d\xi = \text{connu} + \int_0^x F_\xi \, d\xi + \int_0^x G(a\xi + C_1) \, d\xi.$$

Nous posons

$$\int_0^x F_\xi \, d\xi = L(x), \qquad L(o) = o,$$

$$(a \neq o), \qquad \frac{1}{a}\int_0^z G(\lambda) \, d\lambda = \Gamma(z) - \Gamma(o).$$

Ceci donnera

$$\int_0^x G(a\xi + y - ax) \, d\xi = \frac{1}{a}\int_0^{ax} G(\lambda + y - ax) \, d\lambda$$
$$= \Gamma(ax + y - ax) - \Gamma(y - ax).$$

Finalement nous avons

$$u(x, y) = \text{fonction connue} + L(x) + H(y) + M(y - ax).$$

Pour que u soit *nul* à l'origine, nous prendrons H et M tels qu'on ait

$$H(o) = M(o) = o.$$

CHAPITRE I.

PREMIER PROBLÈME. — ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE N'AYANT QUE DEUX CARACTÉRISTIQUES.

Soit $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = f(x, y)$; la solution générale, nous l'avons vu, contient trois fonctions arbitraires, sous la forme

$$H(y) + L(x) + xG(y).$$

Si nous voulons une solution de l'équation passant par trois courbes situées dans les plans

$$y = x, \qquad y = \alpha x, \qquad y = \beta x,$$

nous avons un *système fonctionnel* à résoudre [nous écrivons f_x au lieu de $f(x)$ pour simplifier],

$$\begin{aligned} A_x &= H_x + L_x + x G_x, \\ B_x &= H_{\alpha x} + L_x + x G_{\alpha x}, \\ C_x &= H_{\beta x} + L_x + x G_{\beta x}; \end{aligned}$$

A, B, C sont *donnés*.

Représentons $x G_x$ par Γ_x, d'où

$$\alpha x G_{\alpha x} = \Gamma_{\alpha x}, \qquad \beta x G_{\beta x} = \Gamma_{\beta x};$$

d'où la forme nouvelle

$$\begin{aligned} A_x &= H_x + L_x + \Gamma_x, \\ B_x &= H_{\alpha x} + L_x + \frac{1}{\alpha} \Gamma_{\alpha x}, \\ C_x &= H_{\beta x} + L_x + \frac{1}{\beta} \Gamma_{\beta x}. \end{aligned}$$

Les éliminations sont faciles, en formant

$$A_{\alpha x}, \quad A_{\beta x}, \quad \ldots.$$

On a, pour H, l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} \text{(H)} \quad \text{Fonction connue} &= -\frac{1}{\beta}(B - A)_{\beta x} + \frac{1}{\alpha}(C - A)_{\alpha x} + (B - C)_x \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) H_{\alpha\beta x} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) H_{\beta x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) H_{\alpha x}. \end{aligned}$$

Pour Γ, on trouve l'équation analogue,

$$\begin{aligned} (\Gamma) \qquad \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\Gamma_{\alpha\beta x} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\Gamma_{\beta x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\Gamma_{\alpha x} \\ = (B - A)_{\beta x} - (C - A)_{\alpha x} - (B - C)_x. \end{aligned}$$

Pour L, on a une équation analogue (L), qui est écrite plus loin.

L'*une* des fonctions H, Γ, L étant connue, les autres s'en déduisent facilement.

Faisant une remarque sur les termes en x dans l'expression connue de nos équations fonctionnelles.

A, B, C ne renferment pas de constante; supposons les *analytiques*

$$A = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 \ldots,$$

$$B = \mu_1 x \ldots,$$

$$C = \nu_1 x \ldots.$$

Dans l'équation (H) *il n'y a pas* de terme en x.

Dans les équations (Γ) et (L) le coefficient de x, dans l'expression connue, est *le même*, à un facteur constant près, dépendant du mode de formation de l'équation

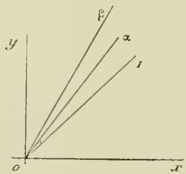
$$(\mu_1 - \lambda_1)\beta - (\nu_1 - \lambda_1)\alpha - (\mu_1 - \nu_1) = X_1.$$

Nous sommes donc amené à étudier l'équation fonctionnelle

$$f(G) \equiv G(mx) + aG(px) + bG(x) = F(x) \text{ fonction connue};$$

m, a, b, p sont des constantes, F est supposé *analytique*.

Fig. 1.



Nous pouvons supposer $\beta > \alpha > 1$; alors

$$m = \beta, \qquad p = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad m = p\alpha > p,$$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} > 0;$$

d'où

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta-\alpha} = a < 0,$$

$$\frac{\beta(\alpha-1)}{\beta-\alpha} = b > 0.$$

Nous étudierons l'équation de deux manières.

Méthode directe pour la solution de l'équation fonctionnelle

$$f(G_x) = F_x.$$

Nous n'avons qu'à résoudre successivement les équations

$$f(G_x) = \text{constante}, \qquad f(G_x) = x, \qquad f(G_x) = x^2, \qquad \ldots.$$

Soit

$$f(G_x) = x^n.$$

Nous aurons la solution

$$G_x = K_n x^n,$$

K_n étant donné par l'équation simple

$$K_n(m^n + ap^n + b) = 1.$$

Il faut et il suffit, pour que ceci soit possible, que la courbe

$$Y = m^x + ap^x + b$$

ne coupe l'axe des x en aucun point dont l'abscisse soit un entier positif.

Or

$$Y(0) = Y(1) = 0;$$

c'est immédiat.

Donc F ne doit contenir ni constante ni terme en x.

La première condition est remplie d'avance; la seconde nous donne

$$X_1 = 0.$$

Ceci exprime évidemment que les trois courbes données, passant par l'origine, ont leurs trois tangentes situées dans un même plan.

Étudions la dérivée

$$Y'_x = \mathcal{L} m . m^x + a \mathcal{L} p . p^x.$$

Elle ne peut avoir qu'*une* racine et cette racine est sûrement située entre o et 1.

Étudions la dérivée seconde

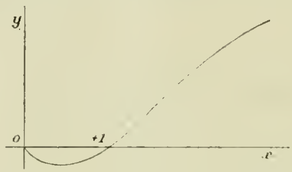
$$Y'' = (\mathcal{L} m)^2 m^x + a(\mathcal{L} p)^2 p^x.$$

Il y a *une* racine, donc un seul point d'*inflexion*, et, comme on a

$$Y(+\infty) = +\infty,$$

la forme de la courbe est la suivante :

Fig. 2.



Donc Y est *positif* pour $x = +2, +3, \ldots$.

Nous n'avons bien qu'*une condition de possibilité*

$$X_1 = 0,$$

et, puisque $Y(0) = 0$, chaque solution est connue à une *constante additive* près, qu'on choisira constamment nulle pour avoir

$$G(0) = 0.$$

Résolution par approximations successives de l'équation fonctionnelle

$$f(G_x) = F_x.$$

Les approximations successives donnent un moyen de passer à des cas plus généraux.

Pour bien montrer leur application, qui nous a été suggérée par les travaux de M. Picard, nous allons traiter le cas le plus simple, déjà résolu directement.

La chaîne des approximations sera

$$\begin{aligned} G_1(mx) + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad &= F(x), \\ G_2(mx) + a\,G_1(px) + b\,G_1(x) &= F(x), \\ G_3(mx) + a\,G_2(px) + b\,G_2(x) &= F(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La solution est $G_\infty(x)$, *si cette limite existe.*

Premier cas. — Soit, d'abord,

$$F(x) \equiv x;$$

$$\begin{aligned} &G_1(mx) = x, & &G_1(x) = \frac{x}{m}, \\ &G_2(mx) = x\left(1 - \frac{ap+b}{m}\right) \quad = x\omega_1, & &G_2(x) = \frac{x}{m}\omega_1, \\ &G_3(mx) = x\left(1 - \frac{ap+b}{m}\omega_1\right) = x\omega_2, & &G_3(x) = \frac{x}{m}\omega_2, \\ &G_4(mx) = x\left(1 - \frac{ap+b}{m}\omega_2\right) = x\omega_3, & &G_4(x) = \frac{x}{m}\omega_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où,

$$G_{q+1}(x) - G_q(x) = \frac{x}{m}(\omega_q - \omega_{q-1}),$$

et l'on a

$$\omega_q - \omega_{q-1} = -\frac{ap+b}{m}(\omega_{q-1} - \omega_{q-2}).$$

$G_q(x)$ a une limite pour $q = \infty$ si la série

$$\sum (G_{q+1} - G_q)$$

est convergente, c'est-à-dire si l'on a

$$\left|\frac{ap+b}{m}\right| < 1.$$

Mais, avec nos *données*, nous avons

$$\frac{ap+b}{m} = \frac{\beta(\alpha-\alpha\beta)+\alpha(\alpha\beta-\beta)}{\alpha\beta(\beta-\alpha)} = -1.$$

Il y a *divergence*, donc G_q n'a pas de limite; nous retrouvons la condition

$$\Lambda_1 = 0.$$

Deuxième cas. — Soit

$$F(x) \equiv x^2.$$

Les calculs se présentent de même, sauf que

$$\frac{ap+b}{m} \quad \text{est remplacé par} \quad \frac{ap^2+b}{m^2}.$$

Cas général. — Soit

$$F(x) = x^k.$$

On voit immédiatement que $\dfrac{ap+b}{m}$ est remplacé par

$$\frac{ap^k+b}{m^k}.$$

Donc, il n'y a, pour le problème général, qu'une seule condition de possibilité si l'on a

$$\left|\frac{ap^k+b}{m^k}\right| < 1 \qquad \text{pour} \qquad k \geqq 2.$$

Traçons donc la courbe

$$Z = \frac{b}{m^x} - c\left(\frac{p}{m}\right)^x,$$

$$c = -a > 0, \qquad \frac{1}{m} = \frac{1}{\beta} < 1, \qquad \frac{p}{m} = \frac{1}{\alpha} < 1, \qquad \beta > \alpha;$$

d'où

$$\frac{1}{m} < \frac{p}{m};$$

donc

$$Z(0) = b - c = -1,$$
$$Z(1) = -1,$$
$$Z(+\infty) = \text{infiniment petit négatif}.$$

La dérivée Z' s'annule si l'on a

$$c(\mathcal{L}\, m - \mathcal{L}\, p)p^x = b\,\mathcal{L}\, m.$$

Il y a *une* racine, puisqu'on a

$$\mathcal{L}\, m - \mathcal{L}\, p > 0.$$

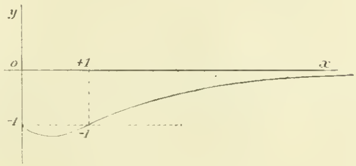
Cette racine est évidemment entre 0 et 1.

De même, la dérivée seconde a *une* racine (d'où *un point d'inflexion*) fournie par l'équation

$$c(\mathcal{L}\, m - \mathcal{L}\, p)^2 p^x = b(\mathcal{L}\, m)^2,$$

et, lorsque Z' est *nul*, Z'' est *positif*; donc nous avons un *minimum* entre 0 et 1.

Fig. 3.



La forme de la courbe montre qu'on a bien

$$|Z(2)| < 1, \qquad |Z(3)| < 1, \qquad \ldots.$$

DEUXIÈME PROBLÈME. — EXTENSION DU PRÉCÉDENT.

Supposons enfin les trois courbes données, par lesquelles passe la solution, tout à fait quelconques. Au lieu de $\alpha . x$ (α = const.), nous avons une fonction $\alpha(x)$ et notre système fonctionnel devient

$$\begin{aligned} A_x &= H_x + L_x + x G_x, \\ B_x &= H_{\alpha(x)} + L_x + x G_{\alpha(x)}, \\ C_x &= H_{\beta(x)} + L_x + x G_{\beta(x)}. \end{aligned}$$

Nous supposons

$$\alpha(\beta_x) \neq \beta(\alpha_x);$$

sans cela nous retomberions sur le cas des lignes droites (α = const.).

Soient γ_x et δ_x des fonctions telles qu'on ait

$$\alpha[\beta(\gamma_x)] = x = \beta[\alpha(\delta_x)]$$

(c'est une sorte de plus petit commun multiple). Nous écrirons ceci :

$$\alpha\beta\gamma_x = x = \beta\alpha\delta_x.$$

On a, sans peine,

$$B_{\beta\gamma_x} - C_{\alpha\delta_x} = (\beta\gamma_x - \alpha\delta_x)G + L_{\beta\gamma_x} - L_{\alpha\delta_x}.$$

Écrivons ceci symboliquement,

$$B_{\beta\gamma} - C_{\alpha\delta} = (\beta\gamma - \alpha\delta)G + L_{\beta\gamma} - L_{\alpha\delta}.$$

De même on a, sans peine,

$$(\beta\gamma)C_{\alpha\delta} - (\alpha\delta)B_{\beta\gamma} = (\beta\gamma - \alpha\delta)H + (\beta\gamma)L_{\alpha\delta} - (\alpha\delta)L_{\beta\gamma}.$$

Nous en tirons G et H, que nous portons dans la première équation, d'où

$$\begin{aligned} A_x &+ \frac{1}{\beta\gamma - \alpha\delta}(\alpha\delta B_{\beta\gamma} - \beta\gamma C_{\alpha\delta}) + \frac{x}{\beta\gamma - \alpha\delta}(C_{\alpha\delta} - B_{\beta\gamma}) \\ &= L_x + \frac{1}{\beta\gamma - \alpha\delta}(\alpha\delta L_{\beta\gamma} - \beta\gamma L_{\alpha\delta}) + \frac{x}{\beta\gamma - \alpha\delta}(L_{\alpha\delta} - L_{\beta\gamma}). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots, \\ \beta(x) &= \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots, \\ \gamma(x) &= \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots, \\ \delta(x) &= \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots. \end{aligned}$$

ce qui suppose les courbes $\alpha(x)$, ... analytiques, les coefficients α_h, β_h, ... étant des constantes.

On a, de suite,

$$\beta\gamma_x = \beta_1\gamma_1 x + \ldots$$

avec

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 1, \qquad \beta_1\alpha_1\delta_1 = 1$$

(il suffit de commencer les identifications d'après la définition de γ_x et de δ_x).

Donc

$$\beta\gamma_x = \frac{1}{\alpha_1}x + \ldots,$$

$$\alpha\delta_x = \frac{1}{\beta_1}x + \ldots.$$

Notre équation prend donc la forme

$$\begin{aligned} A_x + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1} + \Phi_1}\Big[& \left(1 - \frac{1}{\alpha_1} + \Phi_1\right) C\left(\frac{1}{\beta_1}x + \Phi_2\right) \\ & + \left(\frac{1}{\beta_1} - 1 + \Phi_1\right) B\left(\frac{1}{\alpha_1}x + \Phi_2\right)\Big] \\ = L_x + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1} + \Phi_1}\Big[& \left(1 - \frac{1}{\alpha_1} + \Phi_1\right) L\left(\frac{1}{\beta_1}x + \Phi_2\right) \\ & + \left(\frac{1}{\beta_1} - 1 + \Phi_1\right) L\left(\frac{1}{\alpha_1}x + \Phi_2\right)\Big]. \end{aligned}$$

Φ_1 et Φ_2 désignant des séries de puissances entières en x, la première commençant par un terme en x, la seconde par un terme en x^2.

Or, avec α et β *constants*, nous aurions, pour équation en L,

$$\begin{aligned} A_x + \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}\left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) C\left(\frac{x}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) B\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] \\ = L(x) + \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}\left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) L\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]. \end{aligned}$$

C'est bien le cas particulier de la forme précédente.

Dans un second Mémoire, je reprendrai l'étude de cette équation fonctionnelle.

CHAPITRE II.

TROISIÈME PROBLÈME. — ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE AYANT TROIS CARACTÉRISTIQUES DISTINCTES.

Nous avons donc, pour l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} = f(x, y),$$

a étant une constante non nulle, la solution générale contenant comme fonctions arbitraires,

$$L(x) + H(y) + M(y - ax).$$

Supposons la solution astreinte à passer par trois courbes situées dans les plans

$$y = x, \qquad y = \alpha x, \qquad y = \beta x;$$

nous aurons à résoudre le système fonctionnel

$$\begin{aligned} A(x) &= L(x) + H(x) \quad + M(x - ax), \\ B(x) &= L(x) + H(\alpha x) + M(\alpha x - ax), \\ C(x) &= L(x) + H(\beta x) + M(\beta x - ax); \end{aligned}$$

A, B, C sont donnés ainsi que a, α, β. Les inconnues sont les symboles L, H, M.

Posons, pour simplifier,

$$M(\varphi_x) = N\left(\frac{\varphi_x}{1 - a}\right);$$

nous aurons alors, avec

$$\alpha' = \frac{\alpha - a}{1 - a}, \qquad \beta' = \frac{\beta - a}{1 - a},$$

$$\begin{aligned} A_x &= L_x + H_x \; + N_x, \\ B_x &= L_x + H_{\alpha x} + N_{\alpha' x}, \\ C_x &= L_x + H_{\beta x} + N_{\beta' x}, \end{aligned}$$

α' et β' étant des constantes, comme α et β. On fait de suite l'élimination de L et H :

$$\begin{aligned} B_{\beta x} \qquad &= L_{\beta x} \qquad + H_{\alpha\beta x} \qquad + N_{\alpha'\beta x}, \\ B_{\beta x} - B_x \; &= L_{\beta x} - L_x + H_{\alpha\beta x} - H_{\alpha x} + N_{\alpha'\beta x} - N_{\alpha' x}, \\ C_{\alpha x} \qquad &= L_{\alpha x} \qquad + H_{\beta\alpha x} \qquad + N_{\beta'\alpha x}, \\ C_x - C_{\alpha x} &= L_x - L_{\alpha x} + H_{\beta x} - H_{\beta\alpha x} + N_{\beta' x} - N_{\beta'\alpha x}, \\ A_{\alpha x} - A_{\beta x} &= L_{\alpha x} - L_{\beta x} + H_{\alpha x} - H_{\beta x} + N_{\alpha x} - N_{\beta x}. \end{aligned}$$

Il suffit d'ajouter membre à membre et l'on a

$$\begin{aligned} \text{Fonction connue} &= B_{\beta x} - B_x + C_x - C_{\alpha x} + A_{\alpha x} - A_{\beta x} \\ &= N_{\alpha'\beta x} - N_{\beta'\alpha x} + N_{\beta' x} - N_{\alpha' x} + N_{\alpha x} - N_{\beta x}. \end{aligned}$$

On peut faire de même pour H et N.

D'ailleurs, *une* des fonctions étant connue, on a pour une autre une équation fonctionnelle plus simple, si l'on veut.

La discussion de l'équation en N sera très nette si nous supposons A, B, C analytiques. Nous avons alors, en posant

$$\alpha'\beta = \delta, \qquad \beta'\alpha = \gamma,$$

les γ_n étant des constantes connues,

$$f(N) = N_{\delta x} - N_{\gamma x} + N_{\beta' x} - N_{\alpha' x} + N_{\alpha x} - N_{\beta x} = \sum_0^\infty X_n x^n.$$

Si l'équation est résolue *séparément* pour un second membre égal à x^0, x, x^2, x^3, ..., nous avons de suite la solution complète. Étudions successivement tous ces cas.

Soit, d'abord,

$$(N) = 1;$$

alors

$$N = K_0 = \text{const.}$$

et il vient

$$0 = 3K_0 - 3K_0 = 1.$$

Ceci est impossible, mais cela ne nous embarrasse pas, car nous supposons nos trois courbes passant par l'origine; donc A, B, C ne contiennent pas de constante.

D'où l'équation

$$3K_0 - 3K_0 = 0;$$

K_0 est arbitraire et sera pris nul si l'on veut que N ne contienne pas de constante.

Soit maintenant

$$f(N) = x;$$

nous avons alors la solution

$$N_x = K_1 x,$$

et il vient

$$K_1(\delta - \gamma + \beta' - \alpha' + \alpha - \beta) = 1.$$

Mais le coefficient de K_1 est *nul;* on le vérifie aisément.

Donc, en aucun cas le second membre ne pourra contenir un terme en x. La fonction

$$\sum_1^\infty X_n x^n = B_{\beta x} - B_x + C_x - C_{\alpha x} + A_{\alpha x} - A_{\beta x},$$

qui ne contient pas de constante, ne doit pas avoir de terme en x. C'est une *condition de possibilité*, prévue d'avance : les trois tangentes aux courbes doivent être situées dans un même plan.

On voit de même que pour l'équation $f(N) = x^p$ on a la solution

$$N_x = K_p x^p,$$

à condition que

$$\delta^p - \gamma^p + \beta'^p - \alpha'^p + \alpha^p + \beta^p$$

ne soit pas *nul*.

Telle est donc la question à étudier avec soin.

Tout revient à chercher les racines d'une équation transcendante.

Nous supposons les données fixes, avec $\alpha > \beta > 1$, et nous ferons mouvoir la caractéristique $y = ax$, pour examiner les divers cas.

Remarquons, d'abord, que

$$\delta^2 - \gamma^2 + \beta'^2 - \alpha'^2 + \alpha^2 - \beta^2$$

est toujours *positif ;* nous avons en effet

$$\beta^2(\alpha - a)^2 - \alpha^2(\beta - a)^2 + (\beta - a)^2 - (\alpha - a)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)(1 - a)^2,$$

qui se réduit à

$$(\alpha - \beta)(1 + \alpha\beta - \alpha - \beta).$$

Or

$$\alpha = 1 + p, \qquad \beta = 1 + q, \qquad \alpha > \beta,$$

d'où

$$(\alpha - \beta)pq > 0.$$

Ceci ne suppose rien sur la valeur de a, mais il faut maintenant distinguer plusieurs cas.

Premier cas : $0 < a < 1$.

Nous avons alors

$$\alpha' > 0, \qquad \beta' > 0, \qquad \delta > 0, \qquad \gamma > 0$$

et

$$\delta > \gamma,$$

car $\beta < \alpha$ donne $-a\beta > -a\alpha$, d'où

$$(\alpha - a)\beta > (\beta - a)\alpha,$$

d'où

$$\delta > \gamma.$$

Posons

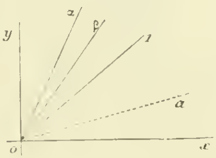
$$u = \delta^p - \gamma^p + \beta'^p - \alpha'^p + \alpha^p - \beta^p;$$

nous avons

$$
\begin{array}{lll}
u_0 = 0 & \text{pour} & p = 0, \\
u_1 = 0 & \text{pour} & p = 1, \\
u_{+\infty} = +\infty & \text{pour} & p = +\infty.
\end{array}
$$

Montrons que u est *positif* pour $p \geqq 2$.

Fig. 4.



Nous remarquons d'abord (nous l'avons déjà dit) que

$$\delta + \beta' + \alpha \equiv \gamma + \alpha' + \beta,$$

car on a

$$\beta(\alpha - a) + \beta - a + \alpha(1 - a) = \alpha(\beta - a) + \alpha - a + \beta(1 - a).$$

Ensuite

$$\delta\beta'\alpha = \alpha'\beta\beta'\alpha \equiv \gamma\alpha'\beta.$$

La *somme* et le *produit* sont les mêmes pour

$$\delta, \quad \beta', \quad \alpha \qquad \text{et} \qquad \gamma, \quad \alpha', \quad \beta.$$

Cette remarque est *capitale*.

Désignons les trois premiers nombres par e_1, e_2, e_3, sans préciser lequel est e_1 ....

Soient g_1, g_2, g_3 les trois autres. Nous avons à comparer des fonctions symétriques en e et en g.

Les e sont racines de

$$z^3 - s z^2 + \lambda z - p = 0;$$

s est la somme, p le produit, λ la somme des doubles produits.

Les g sont racines de

$$z^3 - s z^2 + \mu z - p = 0.$$

Nous avons vu qu'on a, dans tous les cas,

$$\sum_1^3 e^2 > \sum_1^3 g^2.$$

Or

$$\sum e^2 = s^2 - 2\lambda,$$

$$\sum g^2 = s^2 - 2\mu.$$

D'où l'*inégalité fondamentale* $\lambda < \mu$.

De sorte que notre problème est celui-ci :

Soit l'équation

$$z^3 - s z^2 + \lambda z - p = 0.$$

Soit

$$S_n = \sum_1^3 e^n;$$

lorsque n est supérieur ou égal à 2, S_n *croît* lorsque le paramètre λ *décroît*, ou encore on a

$$\frac{dS_n}{d\lambda} < 0.$$

Il sera commode, ici, d'introduire l'*intégrale logarithmique de Cauchy* qui, on le sait, donne une démonstration si simple du théorème de d'Alembert.

L'emploi des imaginaires est bien souvent, sinon indispensable, du moins rapide.

Soit Γ un contour, dans le plan de la variable complexe, qui entoure les trois racines e; on a

$$2\pi i S_n = \int_\Gamma z^n \frac{3z^2 - 2sz + \lambda}{z^3 - sz^2 + \lambda z - p} dz.$$

Dérivons en λ, désignons par F le premier membre de l'équation

$$2\pi i \frac{dS_n}{d\lambda} = \int_\Gamma z^n \left[\frac{1}{F(z)} - z\frac{F'(z)}{F(z)^2}\right] dz.$$

Intégrons par parties le second terme, d'où

$$\int_\Gamma z^{n+1} d\frac{1}{F} = 0 - (n+1)\int_\Gamma z^n \frac{dz}{F},$$

$$2\pi i \frac{dS_n}{d\lambda} = -n \int_\Gamma z^n \frac{dz}{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}.$$

D'ailleurs la théorie des résidus, de Cauchy, donne

$$\int_\Gamma z^n \frac{dz}{F} = 2\pi i \left[\frac{e_1^n}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} + \frac{e_2^n}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)} + \frac{e_3^n}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}\right] = 2\pi i \sigma_n,$$

$$\frac{dS_n}{d\lambda} = -n\sigma_n.$$

Nous voulons donc montrer que σ_n est *positif* pour $n \geqq 2$,

$$\sigma_n = \frac{e_1^n(e_3-e_2) + e_2^n(e_1-e_3) + e_3^n(e_2-e_1)}{(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_3-e_1)};$$

e_1, e_2, e_3 sont supérieurs à *un*, dans notre cas actuel.

Soit

$$e_1 > e_2 > e_3 > 1.$$

Soit

$$e_1 - e_2 = h_1 > 0,$$

$$e_2 - e_3 = h_2 > 0,$$

$$e_1 - e_3 = h_1 + h_2 = h_3.$$

Le numérateur de σ_n doit être *négatif* pour $n \geqq 2$.

Ceci donne

$$\nu_n = -h_2(e_3 + h_3)^n + h_3(e_3 + h_2)^n - h_1 e_3^n < 0.$$

Développons par la formule du binome,

$$(e_3+h_3)^n = e_3^n + C_n^1 e_3^{n-1} h_3 + C_n^2 e_3^{n-2} h_3^2 + \ldots + h_3^n,$$
$$(e_3+h_2)^n = e_3^n + C_n^1 e_3^{n-1} h_2 + C_n^2 e_3^{n-2} h_2^2 + \ldots + h_2^n.$$

Le coefficient de e_3^n est *nul* dans ν_n.

Le coefficient de e_3^{n-1} est *nul*.

Celui de e_3^{n-2} sera

$$h_3 h_2^2 - h_2 h_3^2 = h_3 h_2 (h_2 - h_3).$$

Celui de e_3^{n-3} sera

$$h_3 h_2^3 - h_2 h_3^3 = h_3 h_2 (h_2^2 - h_3^2).$$

Tous les coefficients, dans ν_n, sont *négatifs* pour $n \geqq 2$.

Le premier cas est élucidé, on a

$$u > 0 \qquad \text{pour} \qquad p \geqq 2.$$

Donc on peut toujours calculer les constantes $K_2, K_3, \ldots, K_n, \ldots$.

Il n'y a aucune difficulté parce que *la caractéristique est en dehors des courbes données.*

Faisons une remarque.

Si nous posons

$$S_n = \sum_1^3 e^n \qquad \text{et} \qquad S'_n = \sum_1^3 g^n,$$

nous avons montré que $S_n - S'_n$ ne s'annule pas, en représentant cette différence par

$$(\mu - \lambda) \times \text{valeur moyenne de la dérivée.}$$

Or nous avons

$$\mu - \lambda = \frac{a(\alpha - \beta)}{(1-a)^2}(1 + \alpha\beta - \alpha - \beta).$$

Si a devient *nul*, la différence $\mu - \lambda$ devient *nulle* aussi. Mais cela ne nous embarrasse pas, puisque nous avons traité déjà le cas : $a = 0$.

Maintenant nous allons faire passer la caractéristique entre les plans des courbes données et nous rencontrerons des difficultés à élucider pour les cas où n est *impair*.

Dans les cas nouveaux que nous allons étudier, on ne pourrait plus se servir avantageusement de l'*intégrale logarithmique de Cauchy*, sauf pour le cas où n est *pair*.

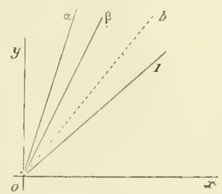
Nous procéderons autrement.

Deuxième cas : $1 < b < \beta$.

La question est plus difficile parce que certains termes sont *négatifs*, et nous étudierons, d'une manière nouvelle, la quantité

$$t = \delta^p - \gamma^p + \beta'^p - \alpha'^p + \alpha^p - \beta^p.$$

Fig. 5.



Première hypothèse. — p est *impair*.

$$\delta = \beta\frac{\alpha - b}{1 - b} < 0, \qquad \delta_1 = |\delta| = \beta\frac{\alpha - b}{b - 1},$$

$$\gamma = \alpha\frac{\beta - b}{1 - b} < 0, \qquad \gamma_1 = \alpha\frac{\beta - b}{b - 1},$$

$$\beta' = \frac{\beta - b}{1 - b} < 0, \qquad \beta'_1 = \frac{\beta - b}{b - 1},$$

$$\alpha' = \frac{\alpha - b}{1 - b} < 0, \qquad \alpha'_1 = \frac{\alpha - b}{b - 1}.$$

D'où l'expression de t, p étant égal à $2n + 1$,

$$t = -\left(\beta\frac{\alpha - b}{b - 1}\right)^p + \left(\alpha\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p - \left(\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p + \left(\frac{\alpha - b}{b - 1}\right)^p + \alpha^p - \beta^p.$$

Regardons l'équation $t = 0$ comme une équation en α, les autres paramètres étant fixes, et cherchons s'il peut exister une racine α supérieure à β, ayant, bien entendu,

$$\beta - b > 0, \qquad b - 1 > 0.$$

D'abord on a

$$t(\beta) \equiv 0.$$

Étudions la valeur de $t(+\infty)$ et les valeurs des deux premières dérivées en α.

On peut poser

$$t(\alpha) = u\alpha^p + v(\alpha - b)^p + w,$$

$$u \equiv \left(\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p + 1,$$

$$v \equiv \frac{1 - \beta^p}{(b - 1)^p}.$$

Remarquons qu'on a

$$u + v < 0,$$

c'est-à-dire

$$(\beta - b)^p + (b - 1)^p + 1 - \beta^p < 0.$$

En effet, posons

$$\beta - b = \mathrm{H}, \qquad b - 1 = \mathrm{K},$$

$$\beta = 1 + \mathrm{K} + \mathrm{H};$$

d'où

$$\mathrm{H}^p + \mathrm{K}^p < (1 + \mathrm{K} + \mathrm{H})^p - 1.$$

Cette inégalité a lieu, H et K étant *positifs*.

Or, $t(+\infty)$ a le signe de $(u + v)$, donc sera *négatif*.

De même, les dérivées première et seconde t' et t'' seront *négatives* à l'infini,

$$\frac{1}{p}\,t'(\alpha) = u\alpha^{2n} - v_1(\alpha - b)^{2n},$$

v est négatif (v_1 est le module de v).

On a $u < v_1$, donc l'équation

$$t'(\alpha) = 0$$

peut avoir deux racines *positives* :

$$\frac{1}{2np}t''(\alpha) = u\alpha^{2n-1} - v_1(\alpha - b)^{2n-1}.$$

Donc l'équation

$$t''(\alpha) = 0$$

ne peut avoir qu'une racine positive.

D'ailleurs u est positif, d'où

$$t'(b) > 0, \qquad t''(b) > 0.$$

Donc t'' s'annule entre b et $+\infty$ et une fois seulement. La courbe $t(\alpha)$ a une inflexion entre b et $+\infty$.

Donc encore t' s'annule, et seulement une fois, entre b et $+\infty$.

Donc, si la valeur $t'(\beta)$ est *négative*, la courbe $t(\alpha)$ ne coupe pas l'axe des α entre β et $+\infty$.

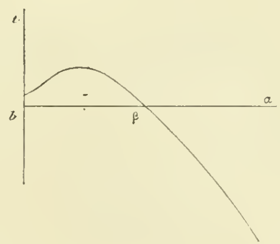
Donc t sera différent de zéro pour

$$\alpha > \beta > b > 1.$$

Si, au contraire, $t'(\beta)$ est *positif*, la courbe $t(\alpha)$ coupera une fois l'axe des α entre β et $+\infty$.

Donc, b, β, $p = 2n + 1$ étant donnés, il y aura alors *une* valeur de α telle que t s'annule.

Fig. 6.

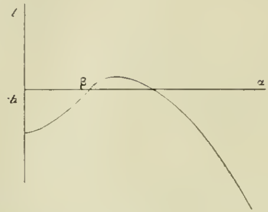


Le problème comportera une condition relative au nombre impair p.

Représentons deux des formes possibles pour la courbe $t(\alpha)$.

Dans le cas de la figure 6, il n'y a pas de condition. Dans le cas de la figure 7, il y a une condition.

Fig. 7.



Étudions la condition $t'(\beta) > 0$.

$$u\beta^{2n} - v_1(\beta - b)^{2n} > 0,$$
$$[(\beta - b)^{2n+1} + (b - 1)^{2n+1}]\beta^{2n} - (\beta^{2n+1} - 1)(\beta - b)^{2n} > 0.$$

Si $\beta - b$ est très petit, elle est remplie.

Nous avons bien vérifié que le cas de la figure (7) peut se présenter, p étant *impair*. *Il peut exister des conditions de possibilité.*

Deuxième hypothèse. — p est *pair*.

Soit $p = 2n$. On a alors

$$\delta^p = \delta_1^p, \qquad \ldots.$$

D'où la nouvelle expression de t

$$t = \left(\beta\frac{\alpha - b}{b - 1}\right)^p - \left(\alpha\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p + \left(\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p - \left(\frac{\alpha - b}{b - 1}\right)^p + \alpha^p - \beta^p$$
$$= u\alpha^p + v(\alpha - b)^p + w,$$

$$u \equiv 1 - \left(\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p,$$

$$v \equiv \frac{\beta^p - 1}{(b - 1)^p}.$$

Étudions le signe de $(u + v)$ ou de

$$\beta^p - 1 + (b - 1)^p - (\beta - b)^p.$$

Soit

$$b = 1 + K, \qquad \beta = 1 + K + H.$$

Nous avons

$$(1 + K + H)^p - 1 + K^p - H^p > 0.$$

Donc $(u + v)$ est *positif*.

Donc, pour $\alpha = +\infty$, t, t', t'' sont *positifs*.

La dérivée $t'(\alpha)$ ne peut avoir qu'*une* racine donnée par

$$u\,\alpha^{2n-1} + v(\alpha - b)^{2n-1} = 0.$$

Si donc on a $t'(\beta) > 0$, comme on a, ici encore, $t(\beta) = 0$, $t(\alpha)$ sera *positif* entre β et $+\infty$.

Notre problème ne comportera aucune condition pour les exposants *pairs*. C'est ce qui a lieu.

Écrivons, en effet, la condition $t'(\beta) > 0$.

$$u\,\beta^{2n-1} + v(\beta - b)^{2n-1} > 0,$$

$$[(b-1)^{2n} - (\beta - b)^{2n}]\,\beta^{2n-1} + (\beta^{2n} - 1)(\beta - b)^{2n-1} > 0,$$

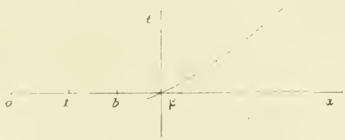
$$(K^{2n} - H^{2n})(1 + H + K)^{2n-1} + H^{2n-1}[(1 + H + K)^{2n} - 1] > 0,$$

$$H^{2n-1}[(1 + H + K)^{2n-1}(1 + K) - 1] + K^{2n}(1 + H + K)^{2n-1} > 0.$$

Or ceci est toujours vrai.

La courbe $t(\alpha)$ a toujours la forme ci-dessous :

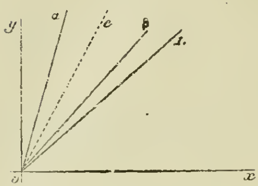
Fig. 8.



Aucune condition. — On le verrait aussi bien par l'intégrale de Cauchy.

Troisième cas : $\beta < c < \alpha$.

Fig. 9.



Nous avons maintenant les relations suivantes :

$$\alpha' = \frac{\alpha - c}{1 - c} < 0, \qquad \alpha'_1 = |\alpha'| = \frac{\alpha - c}{c - 1},$$

$$\beta' = \frac{\beta - c}{1 - c} = \frac{c - \beta}{c - 1} > 0,$$

$$\delta = \beta\alpha' < 0, \qquad \delta_1 = \beta\,\frac{\alpha - c}{c - 1},$$

$$\gamma = \alpha\beta' = \alpha\,\frac{c - \beta}{c - 1} > 0.$$

Nous avons encore à distinguer les cas de p pair et impair dans l'étude de

$$w = \delta^p - \gamma^p + \beta'^p - \alpha'^p + \alpha^p - \beta^p.$$

Première hypothèse. — $p = 2n + 1$, *impair*.

$$w = -\left(\beta\,\frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^p - \left(\alpha\,\frac{c - \beta}{c - 1}\right)^p + \left(\frac{c - \beta}{c - 1}\right)^p + \left(\frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^p + \alpha^p - \beta^p.$$

Regardons w comme une fonction de β et cherchons à tracer la courbe entre les points $\beta = 1$ et $\beta = c$.

D'abord $w(1) = 0$, puis écrivons

$$w(\beta) = -M\beta^p - N(c - \beta)^p + P,$$

$$M = 1 + \left(\frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^p,$$

$$N = \frac{\alpha^p - 1}{(c - 1)^p},$$

$$\frac{1}{p}\,w'(\beta) = -M\beta^{2n} + N(c - \beta)^{2n}.$$

La dérivée première a *deux* racines et l'on a

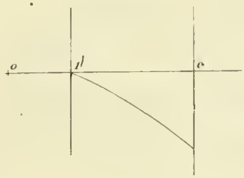
$$\varpi'(c) < 0,$$

$$\frac{1}{2np}\varpi''(\beta) = -M\beta^{2n-1} - N(c-\beta)^{2n-1}.$$

La dérivée seconde est *négative*.

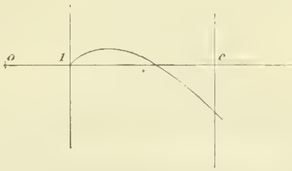
Si nous avons la relation $\varpi'(1) < 0$, la courbe est celle de la figure 10; $\varpi(\beta)$ ne s'annule pas entre 1 et c.

Fig. 10.



Si nous avons $\varpi'(1) > 0$ et $\varpi(c) < 0$, nous avons la courbe de la figure 11. Alors $\varpi(\beta)$ s'annule dans l'intervalle.

Fig. 11.



La condition $\varpi'(1) > 0$ donne

$$-M + N(c-1)^{2n} > 0,$$

$$(\alpha^p - 1)(c-1)^{2n} - (c-1)^p - (\alpha - c)^p > 0$$

ou

$$X > 0.$$

La condition $\varpi(c) < 0$ donne

$$\left(\frac{\alpha - c}{c-1}\right)^{2n+1}(1 - c^{2n+1}) + \alpha^{2n+1} - c^{2n+1} < 0$$

ou

$$Y < 0.$$

Supposons α assez grand et $2n$ assez grand.

X aura le signe de

$$\alpha^{2n+1}[(c-1)^{2n}-1]$$

et Y aura le signe de

$$\alpha^{2n+1}\left[\frac{1-c^{2n+1}}{(c-1)^{2n+1}}+1\right].$$

Si l'on a, par exemple, $c=3$, on aura

$$X > 0 \quad \text{et} \quad Y < 0.$$

Donc le cas de la figure 11 peut être réalisé.

Deuxième hypothèse. — $p = 2n$, *pair*.

Ici $\delta^{2n} = \delta_1^{2n}$, nous avons

$$\begin{aligned}\varpi(\beta) &= \left(\beta\frac{\alpha-c}{c-1}\right)^{2n} - \left(\alpha\frac{c-\beta}{c-1}\right)^{2n} + \left(\frac{c-\beta}{c-1}\right)^{2n} - \left(\frac{\alpha-c}{c-1}\right)^{2n} + \alpha^{2n} - \beta^{2n}\\ &= P\beta^{2n} + Q(c-\beta)^{2n} + R,\end{aligned}$$

$$P \equiv \left(\frac{\alpha-c}{c-1}\right)^{2n} - 1,$$

$$Q \equiv \frac{1-\alpha^{2n}}{(c-1)^{2n}} < 0,$$

$$\frac{1}{2n}\varpi'(\beta) = P\beta^{2n-1} - Q(c-\beta)^{2n-1},$$

$$\frac{1}{2n(2n-1)}\varpi''(\beta) = P\beta^{2n-2} + Q(c-\beta)^{2n-2}.$$

1° Supposons $P > 0$; alors on aura

$$\varpi'(\beta) > 0.$$

Or $\varpi(1) = 0$. La fonction croît, à partir de *zéro;* elle ne s'annule pas.

2° Supposons $P < 0$. On aura par suite

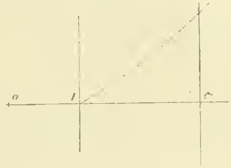
$$\varpi''(\beta) < 0.$$

Examinons le signe de $w(c)$. On a

$$w(c) = \left(\frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^{2n}(c^{2n} - 1) + \alpha^{2n} - c^{2n} > 0.$$

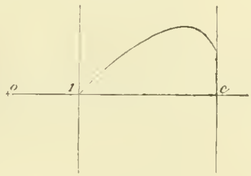
Donc, ici encore, $w(\beta)$ ne s'annule pas, entre 1 et c.

Fig. 12.



La figure 12 correspond à $P > 0$ et la figure 13 à $P < 0$.

Fig. 13.



Le cas où p est *pair* n'entraîne donc aucune difficulté dans notre problème fonctionnel.

La même méthode peut servir à retrouver la conclusion de l'étude du premier cas : *pas de conditions.*

Cette méthode consiste à étudier, non plus l'équation *transcendante*

$$\sum_1^3 e^x - \sum_1^3 g^x = 0,$$

mais une équation *algébrique*, x étant *fixe* et l'*un* de nos paramètres *variant seul*, entre les limites permises par la nature de la question.

CONCLUSION.

En résumé, la conclusion est la suivante :

Quand la caractéristique est située *entre* les projections des courbes données, l'équation

$$\sum_1^3 e^x - \sum_1^3 g^x = 0,$$

qui a toujours la racine $x = 1$, peut avoir d'autres racines. Il est facile de trouver une valeur de x après laquelle il ne pourra plus exister aucune racine.

D'autre part, un beau théorème de Laguerre [1] nous donne une imite supérieure du nombre des racines. En voici l'énoncé :

Soit l'équation

$$A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + A_n e^{\alpha_n x} = 0,$$

les nombres α_1, α_2, ... *allant en* décroissant; *le nombre de ses racines positives est au plus égal au nombre des variations de la suite*

$$\begin{array}{l} A_1, \\ A_1 + A_2, \\ A_1 + A_2 + A_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Nous savons donc, par des tâtonnements, en nombre limité, trouver les racines de l'équation transcendante, c'est-à-dire les *conditions de possibilité* de notre problème, avec le degré d'indétermination de la solution. La question posée est donc résolue lorsque les courbes données sont planes.

Il nous reste beaucoup de questions à traiter. Il faut examiner le cas où la caractéristique coïncide avec la projection de l'une des courbes données (ce cas est simple).

(1) LAGUERRE, *Œuvres*, t. I, p. 28. Ceci se déduit de l'extension de la *règle de Descartes*.

Il faut passer au cas où les courbes données sont *gauches*.

On peut aussi étudier le problème appelé *mixte* par M. Hadamard, où l'on a les données de Cauchy dans l'angle xOy et d'autres données dans l'angle adjacent. Ce sera l'objet d'un *second Mémoire*. Nous allons cependant, dès maintenant, indiquer les conditions de possibilité, pour le cas des données gauches.

Soient les projections de ces données

$$y = \alpha(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots,$$
$$y = \beta(x) = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots.$$

Nous avons alors le système fonctionnel

$$\begin{aligned} A_x &= L_x + H_x \quad + M[x(1-a)],\\ B_x &= L_x + H_{\alpha(x)} + M[\alpha(x) - ax],\\ C_x &= L_x + H_{\beta(x)} + M[\beta(x) - ax]. \end{aligned}$$

Il paraît impossible de faire ici l'*élimination;* prenons la question directement.

D'abord posons

$$M[x(1-a)] = N(x).$$

Soient alors

$$\begin{aligned} L_x &= l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + \ldots,\\ H_x &= h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^2 + \ldots,\\ N_x &= n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Faisant l'identification, on trouve que l_p, h_p, n_p sont connus en fonction des coefficients dont l'indice est plus petit que p, à condition qu'un certain *déterminant* ne s'annule pas.

Or ce déterminant est identique à

$$\sum_1^3 e^p - \sum_1^3 g^p,$$

où les constantes α et β du problème précédent seraient remplacées par

$$\alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta_1,$$

coefficients de x dans $\alpha(x)$ et $\beta(x)$.

Ainsi les discussions précédentes nous donnent ici encore les valeurs de p pour lesquelles il y aura une *condition de possibilité*.

Et l'on forme facilement lesdites conditions, qui ont une expression forcément plus compliquée que dans le cas précédent, où nous avions

$$0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots,$$
$$0 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots.$$

Il restera à prouver la convergence des fonctions L, H, N.

Il était intéressant de noter, dès maintenant, que les *conditions* dépendent seulement de α_1 et β_1, c'est-à-dire des *tangentes à l'origine des projections des courbes données*, et qu'on forme facilement ces conditions, après l'étude du problème où les données sont *planes*, étude achevée ici.

Essai sur les singularités des fonctions analytiques;

PAR M. PAUL DIENES.

INTRODUCTION.

Une fonction analytique quelconque $f(x)$ est déterminée par la suite des coefficients

(1) $$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

d'une série de Taylor, sous la seule restriction que

$$\limsup_{n=\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right|$$

ne soit pas infinie. Toutes les propriétés de la fonction $f(x)$ sont donc déterminées par cette suite; en particulier, l'addition d'un polynome n'ayant aucune influence sur les singularités, l'allure de la fonction au voisinage d'un point singulier est déterminée par les propriétés limites de la suite (1). Donc le problème général de la recherche des singularités est de trouver les relations entre les singularités et les propriétés limites de la suite (1) ou celles des expressions formées à l'aide de cette suite.

Le but principal de ce Mémoire est de donner quelques relations de cette sorte ne supposant aucune restriction à la suite des coefficients. Par ces recherches, nous tâchons de prendre une position intermédiaire convenable entre les deux points de vue opposés qui sont indiqués par M. Hadamard dans son Livre sur la série de Taylor (¹). Ce sera l'objet du deuxième et du troisième Chapitre de ce Mémoire.

Mais, avant d'aborder cette étude générale des singularités, nous

(¹) HADAMARD, *Série de Taylor* (*Scientia*).

nous occuperons, dans le premier Chapitre, des questions plus particulières se rattachant à la notion de l'ordre de la fonction sur son cercle de convergence, notion qui jouera un rôle important dans la suite.

Dans le paragraphe I, nous introduirons la notion donnée par M. Hadamard de l'ordre de la fonction en un point de son cercle de convergence et sur ce cercle entier. Cet ordre, qui était jusqu'ici peu employé, jouera un assez grand rôle dans nos recherches, de sorte que nous n'avons pas cru inutile d'insister sur cette notion. En particulier, nous donnerons un exemple pour démontrer définitivement que, même dans le cas des coefficients à croissance régulière, l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence peut fort bien surpasser le degré d'infinitude de la fonction sur ce cercle.

Il est donc indispensable d'envisager aussi l'influence des arguments des coefficients. Dans le paragraphe II, nous proposerons deux théorèmes pour donner une idée des bornes de cette influence. Le résultat nous montrera que si les coefficients, au moins à partir d'un certain rang, se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe, la fonction se comporte au point 1 de la même manière que la fonction formée par les modules des coefficients.

Supposons maintenant que cette condition ne soit pas remplie. Dans le paragraphe III nous donnerons des théorèmes qui décèlent certains cas où la distribution des arguments change vraiment l'allure de la fonction au voisinage de 1.

Dans le paragraphe IV nous nous mettrons encore dans la condition des arguments quelconques et nous chercherons des critères pour l'étude de la croissance de la fonction au point 1 dans ce cas très général.

Le deuxième Chapitre sera consacré entièrement à l'étude des points singuliers d'ordre négatif. Dans le paragraphe V nous résumerons rapidement les recherches dues pour la plus grande partie à M. Hadamard et à M. Borel sur la représentation des fonctions analytiques aux points réguliers situés sur le cercle de convergence et à l'intérieur du polygone de sommabilité.

A l'aide de ces résultats, dans le paragraphe VI, nous donnerons trois théorèmes pour représenter les valeurs (limites) de la fonction aux points singuliers d'ordre négatif du cercle de convergence.

Le paragraphe VIII poussera plus loin ces recherches en généralisant la notion du point singulier d'ordre négatif à l'étoile. La méthode de sommation exponentielle de M. Borel et le développement de M. Mittag-Leffler sous la forme donnée par M. Lindelöf permettront de résoudre complètement la représentation de ces valeurs (limites) de la fonction.

L'objet du troisième Chapitre est l'étude des pôles et des points critiques algébriques. En particulier, dans le paragraphe VIII, nous nous servirons des moyennes arithmétiques d'ordre fractionnaire pour compléter un théorème de M. Hadamard comme M. Fatou a complété un résultat analogue de M. Hadamard relatif aux points réguliers du cercle de convergence.

Le paragraphe IX nous donnera la solution complète du problème relatif aux pôles situés sur le cercle de convergence et sur le polygone de sommabilité, et cela à l'aide de la sommation exponentielle de M. Borel.

Dans le paragraphe X, nous généraliserons ce résultat par la méthode de sommation exponentielle généralisée de M. Borel et par celle de M. Hanni.

Enfin, dans le paragraphe XI, à l'aide du développement, dû à M. Mittag-Leffler, des fonctions analytiques par une suite de fonctions entières, nous établirons la relation générale qui existe entre les coefficients de la série de Taylor et les pôles situés à l'origine des demi-droites exclues de l'étoile.

Les deux derniers paragraphes s'occupent des points critiques algébriques situés sur le cercle de convergence, sur le polygone de sommabilité et sur la frontière des sommations exponentielles généralisées de M. Borel. En particulier, dans le paragraphe XII, nous donnerons quelques théorèmes sur la croissance des fonctions entières qui nous serviront dans le paragraphe suivant.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans des Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (20 février 1905, 21 décembre 1908 et 15 mars 1909).

CHAPITRE I.

DE L'ORDRE DE LA FONCTION SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE ET DE L'INFLUENCE DES ARGUMENTS DES COEFFICIENTS SUR LES SINGULARITÉS.

§ I. — De l'ordre et du degré d'infinitude de la fonction sur le cercle de convergence.

1. Bornons-nous, pour le moment, à l'étude de l'allure de la fonction sur le cercle de convergence en supposant, pour plus de simplicité, que le centre de ce cercle soit à l'origine et que son rayon soit égal à l'unité.

Le problème qui se pose en premier lieu est de représenter le plus simplement possible la valeur de la fonction dans les points réguliers du cercle de convergence. Par exemple, le théorème d'Abel donne une réponse partielle à cette question en disant que, lorsque la série elle-même converge en un point du cercle, la somme de la série représente bien la valeur de la fonction en ce point. Mais, malheureusement, un seul pôle d'ordre 1 situé sur le cercle de convergence rend absolument impossible la convergence de la série dans tous les points du cercle. D'autre part, une partie du cercle (ou le cercle entier même) peut être une ligne singulière sans troubler la convergence de la série dans les autres points du cercle.

Il est donc indispensable, pour les recherches méthodiques des singularités, de caractériser, de mesurer pour ainsi dire la singularité de la fonction considérée dans les points du cercle de convergence, et de caractériser de même la singularité de la fonction sur le cercle entier. C'est ce qui est fait par M. Hadamard dans la troisième Partie de sa Thèse [1] d'une manière fort heureuse en développant l'idée de M. Dar-

[1] Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions*, etc. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1892).

boux (¹), qui consiste à envisager l'allure des dérivées successives de la fonction sur le cercle de convergence. Comme cet ordre de la singularité en un point du cercle et sur le cercle entier sera d'une grande importance dans la suite, nous allons en donner rapidement la définition.

2. A cet effet, introduisons une notion préliminaire, voisine de la notion de fonction à variation bornée.

Nous dirons, avec M. Hadamard (²), qu'une fonction continue $f(x)$ de la variable réelle x est *à écart fini* dans l'intervalle (a, b), lorsque les intégrales

$$n\int \cos nx\, f(x)\, dx \quad \text{et} \quad n\int \sin nx\, f(x)\, dx$$

prises entre des limites quelconques intérieures à l'intervalle (a, b) restent finies et moindres en valeur absolue qu'une quantité finie I lorsque n augmente indéfiniment. I est l'écart de la fonction dans cet intervalle. Par exemple, si la fonction $f(x)$ a une dérivée finie dans tous les points de l'intervalle, la fonction y est à écart fini.

Considérons maintenant, avec la fonction donnée

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2}$$

les fonctions

$$\mathrm{H}^{\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} a_n x^n, \tag{3}$$

où α est un nombre réel quelconque. L'opération H^{α} est une légère modification de la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann.

M. Hadamard démontre que, lorsque la fonction $\mathrm{H}^{\alpha} f(x)$ est finie, continue et à écart fini sur un arc (a, b) du cercle de convergence, il en est de même de la fonction $\mathrm{H}^{\alpha'} f(x)$, α' étant inférieur à α. Donc, un arc déterminé (a, b) du cercle de convergence étant donné, il existe un nombre ω, pouvant varier d'ailleurs de $-\infty$ à $+\infty$, tel que, sur cet arc, la fonction $\mathrm{H}^{\omega-\varepsilon} f(x)$, pour $\varepsilon > 0$, est finie, continue et à écart

(¹) DARBOUX, *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres* (*Journal de Mathématiques*, 1878).

(²) HADAMARD, *Thèse*, p. 65.

fini, mais qu'une de ces propriétés fait défaut à la fonction $H^{-\omega+\varepsilon}f(x)$. Le nombre ω est l'ordre de la fonction $f(x)$ sur l'arc (a, b).

On voit tout de suite que, l'arc (a', b') étant intérieur à l'arc (a, b), l'ordre de la fonction sur cet arc ne peut surpasser l'ordre sur l'arc (a, b). On peut donc définir l'ordre de la fonction en un point x du cercle de convergence comme la limite des ordres sur des arcs qui, tous, contiennent le point x et dont la longueur tend vers zéro. Ainsi, par exemple, l'ordre en un point régulier est nécessairement $-\infty$, car l'opération H^α n'introduit pas des points singuliers nouveaux (Hadamard, *Thèse*, p. 71).

L'ordre sur le cercle entier Ω est, par définition, le plus grand ordre sur le cercle (dans le sens algébrique du mot), et, d'après un théorème fondamental de M. Hadamard (*Thèse*, p. 71),

$$\Omega = 1 + \limsup_{n=\infty} \frac{\log|a_n|}{\log n}. \tag{4}$$

5. On voit aisément que, au point 1, l'ordre de la fonction

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha},$$

où α est un nombre réel quelconque, excepté 0 et les entiers négatifs, est égal à α. On est donc amené à croire qu'il y a une relation étroite entre l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence et le degré d'infinitude le plus élevé de la fonction sur le même cercle. La question a quelque importance, car l'ordre et le degré d'infinitude de la fonction sur le cercle sont deux notions fondamentales relatives à l'allure de la fonction au voisinage de ce cercle.

A cet égard, M. Borel [1] a donné un exemple pour montrer que, dans le cas où les modules des coefficients sont à croissance irrégulière, l'ordre peut fort bien surpasser le degré d'infinitude. Pour montrer la cause de cette divergence entre les deux nombres envisagés, faisons la remarque suivante.

Étant donnée la série convergente à termes positifs

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

[1] Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 77.

on peut toujours remplacer une infinité de c_n par $\frac{1}{\log n}$ de telle façon que la convergence ne soit pas troublée. Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c'_n$$

la nouvelle série ainsi obtenue.

Regardons maintenant la fonction

$$(5) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n x^n.$$

Son rayon de convergence est l'unité et, d'après (4), son ordre sur le cercle entier est aussi égal à 1, car

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \frac{1}{\log n}}{\log n} = -\lim_{n=\infty} \frac{\log \log n}{\log n} = 0.$$

D'autre part, le degré d'infinitude de $\varphi(x)$ est o. En effet, la série (5) converge absolument dans tous les points du cercle de convergence; donc la fonction $\varphi(x)$, en valeur absolue, a une limite supérieure finie sur le cercle.

Ajoutons encore que, lorsque l'ordre est plus grand que l'unité, la fonction devient nécessairement infinie au voisinage d'un point du cercle de convergence.

4. Mais, ce qui est plus important, nous allons donner un exemple pour montrer que l'ordre peut être plus grand que le degré d'infinitude, même si les modules des coefficients sont à croissance régulière.

Considérons pour cela la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{E(\sqrt{n})} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

où $E(\sqrt{n})$ est la partie entière de $\sqrt{n}$. Les modules des coefficients sont évidemment à croissance régulière, et l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence de rayon 1 est l'unité.

Envisageons d'autre part le degré d'infinitude. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$s_n(x_0) = \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \ldots + \alpha_n x_0^n.$$

On voit facilement que [1]

$$\limsup_{n=\infty} \left| \frac{s_n(1)}{\sqrt{n}} \right| = 1.$$

Nous allons démontrer qu'il en est de même pour un point quelconque $x_0 \neq 1$ du cercle de convergence, c'est-à-dire que

$$\limsup_{n=\infty} \left| \frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}} \right| < A.$$

où A est un nombre fini. Remarquons à cet effet que, si l'on pose

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sigma_n,$$

on a identiquement

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_n (q_k - q_{k+1}) + \sigma_n q_n.$$

Dans le cas actuel

$$q_k = \alpha_k, \qquad p_k = x_0^k,$$

c'est-à-dire

$$s_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_0^k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_0 + x_0^2 + \ldots + x_0^k)(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + (x_0 + x_0^2 + \ldots + x_0^n)\alpha_n,$$

et ainsi

$$s_n(x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0} \left[\sum_{k=1}^{n-1} (1 - x_0^k)(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + (1 - x_0^n)\alpha_n \right].$$

---

(1) *Voir*, par exemple, VIVANTI, *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, 1906, p. 419.

Considérons maintenant le rapport

$$\frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}}.$$

On voit d'une part que

$$\lim_{n=\infty}(1-x_0^n)\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}=0.$$

et, pour les indices k qui ne sont pas de forme r^2-1, on a

$$\alpha_k-\alpha_{k+1}=0.$$

D'autre part, lorsque

$$k=r^2-1,$$

nous avons

$$|\alpha_k-\alpha_{k+1}|=2$$

et l'on a, dans le sigma, des termes de cette sorte en nombre $\sqrt{n}$, ce qui donne réellement

$$\text{(6)}\qquad \limsup_{n=\infty}\left|\frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}}\right|<\text{A}.$$

Pour en tirer la conclusion cherchée, écrivons que

$$f(x.x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x_0^n x^n$$

et

$$\frac{f(x.x_0)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x_0)x^n;$$

donc, pour toutes valeurs de x positif et inférieur à 1, l'inégalité (6) nous donne

$$\left|\frac{f(x.x_0)}{1-x}\right|<\text{A}\sum_{n=0}\sqrt{n}\,x^n.$$

Mais on sait que

$$\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\,x^n=\text{B}\ \text{(fini)},$$

d'où le résultat

$$\limsup_{x=1}\left|(1-x)^{\frac{1}{2}}f(x.x_0)\right|<\text{AB}.$$

Le degré d'infinitude de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{E(\sqrt{n})} x^n$$

ne surpasse donc pas $\frac{1}{2}$, tandis que son ordre est égal à 1. Mais ce qui nous paraît encore plus important, c'est le fait que la série formée par les modules des coefficients est

$$\sum_{n=0} x^n = \frac{1}{1-x},$$

dont le degré d'infinitude sur le cercle de convergence est manifestement égal à l'unité. Donc les modules des coefficients ne déterminent pas complètement l'ordre de grandeur de la fonction sur le cercle de convergence, les arguments des coefficients entrent aussi en jeu. Il en ressort nettement que l'*influence des arguments* des coefficients sur l'allure de la fonction sur son cercle de convergence est beaucoup plus profonde qu'on n'aurait pu le croire. Un problème nouveau et général se pose donc : *Déterminer les bornes et les caractères de l'influence des arguments sur les propriétés générales de la fonction.*

§ II. — De l'influence des arguments des coefficients sur les singularités.

5. Loin d'avoir l'intention d'épuiser ce problème, nous allons, par quelques résultats qui s'y rattachent, illustrer plutôt la nature et la limite de cette influence. Pour cela, énonçons tout d'abord un lemme général qui déjà donnera lui-même une idée assez nette du mécanisme de l'influence en question.

Soit donnée une suite de nombres complexes

$$(7) \qquad \rho_0 e^{i\alpha_0}, \quad \rho_1 e^{i\alpha_1}, \quad \ldots, \quad \rho_n e^{i\alpha_n}, \quad \ldots$$

avec la restriction que tous les termes se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$

du plan complexe (sommet à l'origine). Nous allons démontrer que

$$(8)\qquad \liminf_{n=\infty} \frac{|\rho_0 e^{i\alpha_0}+\rho_1 e^{i\alpha_1}+\ldots+\rho_n e^{i\alpha_n}|}{\rho_0+\rho_1+\ldots+\rho_n} = f(\alpha),$$

où $f(\alpha)$ est un nombre positif, non nul, qui ne dépend pas des ρ_n.

Pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$, la démonstration est presque immédiate et l'on a, dans ce cas,

$$(9)\qquad |\rho_0 e^{i\alpha_0}+\rho_1 e^{i\alpha_1}+\ldots+\rho_n e^{i\alpha_n}| > (\rho_0+\rho_1+\ldots+\rho_n)\cos\alpha.$$

En effet, α étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, on vérifie facilement qu'on a

$$|\rho_0 e^{i\alpha_0}+\rho_1 e^{i\alpha_1}| > \rho_0+\rho_1\cos\alpha > (\rho_0+\rho_1)\cos\alpha.$$

Supposons donc que (9) soit vrai si l'on remplace n par $n-1$, et démontrons qu'il est vrai pour n. On a

$$\begin{aligned}&|(\rho_0 e^{i\alpha_0}+\rho_1 e^{i\alpha_1}+\ldots+\rho_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}})+\rho_n e^{i\alpha_n}|\\ &\quad > |\rho_0 e^{i\alpha_0}+\rho_1 e^{i\alpha_1}+\ldots+\rho_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}}|+\rho_n\cos\alpha_1,\end{aligned}$$

car la somme

$$\rho_0 e^{i\alpha_0}+\rho_1 e^{i\alpha_1}+\ldots+\rho_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}},$$

comme tous ses termes, est un nombre situé dans le même angle : donc elle peut être prise pour $\rho_0 e^{i\alpha_0}$; d'autre part, par hypothèse,

$$|\rho_0 e^{i\alpha_0}+\ldots+\rho_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}}| > (\rho_0+\rho_1+\ldots+\rho_{n-1})\cos\alpha_2;$$

ainsi, α_1 et α_2 ne surpassant pas α, (9) est démontré pour n quelconque.

Cela posé, prenons le cas plus général où $\alpha < \pi$. Partageons α en deux parties égales : α_1 et α_2. Soient s_{n_1} la somme des termes d'indice inférieur ou égal à n qui se trouvent dans l'angle α_1 et s_{n_2} la somme du reste des termes d'indice inférieur ou égal à n, de sorte que

$$s_n = \rho_0 e^{i\alpha_0}+\ldots+\rho_n e^{i\alpha_n} = s_{n_1}+s_{n_2}.$$

De même, soit

$$s'_n = \rho_0+\rho_1+\ldots+\rho_n = s'_{n_1}+s'_{n_2}.$$

En vertu de (9),

$$\liminf_{n=\infty} \frac{|s_{n_1}|}{s'_{n_1}} = \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \liminf_{n=\infty} \frac{|s_{n_2}|}{s'_{n_2}} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

d'où il résulte que

$$\liminf_{n=\infty} \frac{|\rho_0 e^{i\alpha_0} + \ldots + \rho_n e^{i\alpha_n}|}{\rho_0 + \ldots + \rho_n}$$
$$= \liminf_{n=\infty} \frac{\big| |s_{n_1}| e^{i\alpha_{n_1}} + |s_{n_2}| e^{i\alpha_{n_2}} \big|}{s'_{n_1} + s'_{n_2}} \geq \liminf_{n=\infty} \frac{\big| |s_{n_1}| + |s_{n_2}| e^{i\alpha} \big|}{|s_{n_1}| + |s_{n_2}|} \cos\frac{\alpha}{2},$$

si l'on pose

$$s_{n_1} = |s_{n_1}| e^{i\alpha_{n_1}}, \qquad s_{n_2} = |s_{n_2}| e^{i\alpha_{n_2}}$$

et si l'on remarque que

$$|\alpha_{n_1} - \alpha_{n_2}| < \alpha.$$

Mais, en général, lorsqu'on a deux suites positives A_n, B_n, on a, pour $\cos\alpha < 0$,

$$\liminf_{n=\infty} \frac{|A_n + B_n e^{i\alpha}|^2}{(A_n + B_n)^2}$$
$$\geq \liminf_{n=\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{(A_n + B_n)^2} + \cos\alpha \limsup_{n=\infty} \frac{2A_n B_n}{(A_n + B_n)^2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha > 0,$$

d'où résulte immédiatement notre lemme (8).

Remarquons encore que, lorsque la série $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n$ est convergente, on peut appliquer le lemme aux sommes relatives à ces deux séries,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n}.$$

6. Nous allons maintenant établir quelques propositions à l'aide de ce lemme. *On sait que, lorsque les coefficients sont positifs (désignons-les par ρ_n) et le rayon de convergence égal à l'unité, le point* 1 *est toujours un point singulier de la fonction*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n.$$

Nous démontrerons qu'il en est de même pour la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n. \tag{10}$$

si, du moins à partir d'un certain indice, tous les coefficients se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine).

En effet, ajoutons à $f(x)$ un polynome pour que la condition indiquée soit remplie à partir de l'indice 0, ce qui est toujours possible sans changer en aucune façon la singularité de $f(x)$; supposons que cela soit fait et développons cette fonction en un point $x_0 < 1$ de l'axe positif, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{11}$$

Tâchons maintenant de déterminer le rayon de convergence de cette série. Pour k quelconque, tous les termes de la série

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \rho_k e^{i\alpha_k} + (k+1)\rho_{k+1} e^{i\alpha_{k+1}} + \ldots,$$

par suite sa somme, se trouvent dans le même angle $\alpha < \pi$. Le lemme (8) donne dans ce cas

$$\left|\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right| > A \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!},$$

où A ne dépend que de α; donc, le même A s'applique pour k quelconque.

D'où il résulte que

$$\limsup_{k=\infty} \left|\sqrt[k]{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}\right| = \limsup_{k=\infty} \sqrt[k]{A \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}}.$$

Mais nous savons que le rayon de convergence de la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

est égal à $1 - x_0$; donc

$$\limsup_{k=\infty} \left|\sqrt[k]{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}\right| = \frac{1}{1 - x_0},$$

car

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[k]{A} = 1.$$

Par suite, le rayon de convergence de la série (11) est au plus $1 - x_0$, ce qui revient à dire qu'il est égal à $1 - x_0$; par conséquent, le point 1 est vraiment un point singulier de la fonction (10), comme nous voulions l'établir

7. Supposons maintenant que $\varphi(x)$ devienne infini au point 1. Je dis que *le degré d'infinitude de $f(x)$ est égal à celui de $\varphi(x)$*; ou, plus précisément, il y a, sur l'axe réel positif, un intervalle fini $(x_0, 1)$ où l'on a

$$|f(x)| > A\,\varphi(x), \tag{12}$$

A étant une constante positive convenable.

En effet, on peut toujours supposer que *tous* les coefficients de $f(x)$ se trouvent dans le même angle $\alpha < \pi$, car un polynome divisé par $\varphi(x)$ devient 0 pour $x = 1$. Mais dans ce cas les termes des deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n,$$

pour x positif quelconque, se trouvent dans l'angle α; donc, d'après le lemme (8),

$$\frac{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n\right|}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n} > B > 0.$$

Mais B est indépendant de x; donc

$$\liminf_{x=1} \frac{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n\right|}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n} > 0,$$

ce qui démontre la proposition.

8. L'inégalité (12) nous permet de généraliser en quelques lignes un théorème très important de Cesàro. D'après ce théorème, a_n et b_n

étant positifs,

$$(13) \qquad \lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

lorsque la limite du second membre existe et lorsque la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

devient infinie au point 1.

Supposons que les b_n, à partir d'un certain rang, se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine) et qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = a.$$

Nous allons démontrer que la relation (13) subsiste dans ce cas plus général. En effet,

$$a_n = ab_n + \varepsilon_n b_n$$

avec

$$\lim \varepsilon_n = 0;$$

donc on peut écrire

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = a + \lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}.$$

Calculons la limite du second membre.

D'après (12), si x est assez proche de 1,

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \right| < \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n b_n| x^n}{A \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| x^n}.$$

Mais, dans le second membre, tous les coefficients sont positifs, et la limite de leur rapport est o. On a donc, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = 0.$$

Il en résulte que *le théorème de Cesàro subsiste dans le cas où les coefficients se trouvent, au moins à partir d'un certain rang, dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe.* De même, pour les s_n et pour les moyennes arithmétiques d'ordre quelconque.

Remarquons enfin que, lorsqu'il y a une infinité de coefficients dont les arguments diffèrent de π, toutes ces propositions sont généralement en défaut; donc, pour ces propositions, la condition que, du moins à partir d'un certain rang, tous les coefficients se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$, est une limitation naturelle.

§ III. — La distribution uniforme des arguments des coefficients abaisse le degré d'infinitude.

9. Supposons maintenant que cette condition ne soit pas remplie. La question se pose : Dans quel cas peut-on affirmer que les arguments qui diffèrent les uns des autres de π changent réellement la nature de la singularité au point 1? en particulier, dans quel cas abaissent-ils le degré d'infinitude au même point? Ou, au contraire, dans quelles conditions le degré d'infinitude de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{14}$$

reste-t-il égal à celui de

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n, \tag{15}$$

quoique les a_n ne satisfassent pas à la condition indiquée plus haut?

Pour répondre, au moins partiellement, à la première question, nous allons établir une proposition qui permet, dans certain cas, de distinguer l'influence des arguments de celle des modules des coefficients.

Soient, en effet, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les points limites de la suite infinie

$$(16) \qquad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

Entourons les points α_i des cercles de rayon assez petit pour que tous ces cercles soient extérieurs les uns aux autres; les termes de la suite (16) qui sont extérieurs à tous les cercles seront en nombre fini b. Soit enfin $m_i(n)$ le nombre des termes d'indice inférieur ou égal à n qui se trouvent dans le cercle c_i, et formons les rapports $\frac{m_i(n)}{n}$.

Si la limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_i(n)}{n} = f_i$$

existe, nous dirons que *la fréquence* du point limite α_i est f_i.

Démontrons maintenant que dans ce cas

$$(17) \qquad \lim_{x=1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + \ldots + f_k\alpha_k.$$

En effet, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha_1 \sum_{n_1} x^{n_1} + \alpha_2 \sum_{n_2} x^{n_2} + \ldots + \alpha_k \sum_{n_k} x^{n_k} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n.$$

Mais, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n_i=0}^{\infty} x^{n_i}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \lim_{n=\infty} \frac{m_i(n)}{n} = f_i$$

---

(1) *Voir*, par exemple, Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, 1902, p. 66.

et

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = 0,$$

d'où résulte (17).

Remarquons encore qu'en raisonnant ainsi sur la fonction

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

on obtient la relation

$$(18) \qquad \lim_{x=1} \sum_{x=1}^{\infty} a_n x^n = f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + \ldots + f_k\sigma_k,$$

où f_i est la fréquence du point limite σ_i par rapport à la suite

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots.$$

Cette relation est une généralisation immédiate du théorème d'Abel, d'après lequel, s'il n'y a qu'un seul point limite σ, le premier membre de (18) tend vers σ. Cette relation vérifie encore complètement les vues de Leibniz et de Lagrange dans la question particulière de la sommation de la série divergente [1]

$$(19) \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

En effet, les s_n de la fonction

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

sont

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad \ldots.$$

Nous avons, par suite, deux points limites : 1 et 0, avec la *fréquence* $\frac{1}{2}$.

---

[1] *Voir* à ce sujet Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, 1901 (Introduction).

D'après (18), la valeur de la fonction au point 1 est donc

$$\frac{1}{2}\,1 + \frac{1}{2}\,0 = \frac{1}{2},$$

ce qui montre évidemment que, pour déterminer la somme de la série divergente (19), c'est la fréquence de 1 se rapportant à la série complète qu'il faut considérer.

Remarquons enfin qu'à l'aide de la relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \nu a_\nu}{n^{p+1}} = \frac{p}{p+1} \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu}{n^p},$$

en supposant que la limite du deuxième membre existe, on généralise facilement la relation (18) pour le cas où les coefficients tendent vers l'infini. Il suffit de considérer les points limites de la suite $\frac{a_n}{n^r}$. Nous pouvons faire de même pour les moyennes arithmétiques des s_n d'ordre quelconque.

10. Mais, au lieu de ces considérations, nous allons nous servir de ces résultats pour établir une proposition qui donnera une idée assez exacte de l'influence des arguments.

Soit donnée

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\alpha_n} x^n, \tag{20}$$

et supposons que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \rho_n = A \tag{21}$$

pour que l'influence des modules soit éliminée.

Il est évident que

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n$$

devient infini de degré 1 au point 1. Quelle distribution des $e^{i\alpha_n}$ abaisse le degré d'infinitude de la fonction (20)? Nous allons démontrer que, *si la distribution des* $e^{i\alpha_n}$ *sur le cercle de rayon* 1 *est* *uniforme, la fonction* (20) *ne devient pas infinie de degré* 1 *au point* 1.

La distribution des $e^{i\alpha_n}$ est dite *uniforme* lorsque, divisant le cercle en k arcs égaux, la fréquence des $e^{i\alpha_n}$ sur un arc existe et est égale à $\frac{1}{k}$, et cela pour une infinité de valeurs de k.

Pour démontrer cette proposition pour la fonction (20), il suffit de la démontrer pour la fonction

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\alpha_n} x^n,$$

car, d'après la condition (21),

$$f(x) = A f_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{i\alpha_n} x^n$$

avec

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

et, selon le théorème déjà cité de Cesàro,

$$\lim_{x=1} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{i\alpha_n} x^n = 0.$$

Formons maintenant les fonctions

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(k)} x^n,$$

en prenant, au lieu de α_n, le milieu $\beta_n^{(k)}$ de l'arc qui le contient; (17) nous donne

$$\lim_{x=1} (1 - x) \varphi_k(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{k}}}{k} \sum c_k = 0,$$

où $\sum c_k$ est la somme des $k^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité.

Mais

$$f(x) = \varphi_k(x) + \varepsilon_k(x),$$

et, pour ε quelconque, à partir d'un certain indice k, tous les coefficients de $\varepsilon_k(x)$ sont inférieurs à $\frac{\varepsilon}{2}$; donc

$$|(1-x)f(x)| < |(1-x)\varphi_k(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, si x est assez proche de l'unité,

$$|(1-x)\varphi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

donc

$$|(1-x)f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

§ IV. — Critères formés des s_n pour reconnaître le degré d'infinitude, la distribution des arguments étant arbitraire.

11. Passons maintenant à la seconde question soulevée précédemment. On sait, depuis Abel, que pour les séries à coefficients positifs, l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

entraîne nécessairement

$$\lim_{x=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \infty \tag{22}$$

D'après le lemme (8), c'est aussi vrai pour les séries dont les coefficients se trouvent, du moins à partir d'un certain indice, dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine). Supposons maintenant que les coefficients ne soient pas assujettis à cette condition. Dans ce cas, la fonction ne devient pas infinie, en général, au point 1. Il s'agit de déterminer des conditions entraînant nécessairement l'égalité (22). *Il peut arriver*, par exemple, *que les s_n deviennent infinis en valeur absolue et se trouvent déjà dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe* (sommet à l'origine). *Cela suffit pour conclure que la fonction devient infinie au point* 1. En effet, envisageons les deux fonctions

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

et

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n.$$

D'après (12) nous avons pour x assez proche de l'unité

$$\left|\frac{f(x)}{1-x}\right| > A\,\varphi(x).$$

Mais

$$\lim_{x=1}(1-x)\,\varphi(x) = \infty,$$

comme on le voit tout de suite, si l'on considère la fonction

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 1\,.\,x^n$$

et

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n,$$

et l'on se sert du théorème de Cesàro d'après lequel

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{s_n} = 0$$

entraîne l'égalité

$$\lim_{x=1} \frac{1}{(1-x)\,\varphi(x)} = 0.$$

Donc vraiment

$$\lim_{x=1} |f(x)| = \infty.$$

Remarquons enfin que c'est une généralisation d'un théorème de M. Pringsheim (¹).

12. Mais le cas le plus général et, en même temps, le plus compliqué est celui où les modules des s_n ne tendent pas directement vers l'infini,

(¹) Pringsheim, *Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise* (*Münchener Sitzungsberichte*, t. XXX, 1900, p. 40).

mais où la suite des s_n a aussi des points limites finis et où les arguments des s_n ne sont assujettis à aucune restriction.

Pour plus de simplicité, nous nous bornerons à supposer, pour le moment, que les coefficients a_n sont réels et que

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} |a_n| < a < 1.$$

Dans ces conditions, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Si, pour les s_n positifs, on a

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} \frac{s_n}{n^{\frac{1}{2}}} = \infty, \tag{23}$$

et, pour les s_n négatifs,

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} |s_n| = \mathrm{A}, \tag{24}$$

où A est un nombre fini ou nul, *la fonction* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *devient infinie au point* 1.

Nous démontrerons, en effet, que, dans les conditions indiquées, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{s_0 + s_1 + \ldots + s_n} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{\mathrm{S}_n} = 0, \tag{25}$$

et que S_n est positif pour n assez grand. Alors, en appliquant le théorème de Cesàro aux deux fonctions

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

et

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{S}_n x^n,$$

nous aurons

$$\lim_{x=1} \frac{\dfrac{x}{(1-x)^2}}{\dfrac{f(x)}{(1-x)^2}} = \lim_{x=1} \frac{x}{f(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{\mathrm{S}_n} = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Démontrons donc l'égalité (25).

Pour cela, regardons la suite finie

$$s_0,\quad s_1,\quad \ldots,\quad s_{n-1},\quad s_n,$$

et soit $n^{\frac{1}{2}}\alpha_n$ la plus grande des valeurs de

$$|s_0|,\quad |s_1|,\quad \ldots,\quad |s_{n-1}|,\quad |s_n|.$$

D'après l'hypothèse (23),

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty.$$

Le nombre des termes de la suite finie qui sont plus grands que $n^{\frac{1}{2}}$ est au moins

$$n^{\frac{1}{2}}\alpha_n - n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1),$$

à cause de la petitesse des coefficients a_n qui constituent les s_n. Donc, quand nous formons

$$S_n = s_0 + s_1 + \ldots + s_n,$$

les termes considérés tout d'abord donnent une somme supérieure ou égale à $n^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$, c'est-à-dire cette partie de S_n devient infinie d'ordre supérieur à 1. Les autres termes positifs ne diminuent point cet ordre, les termes négatifs non plus, car, d'après l'hypothèse (24), leur somme, en valeur absolue, est moindre que nA. Donc, l'équation (25) est vérifiée et, à partir d'un certain indice, S_n sera toujours positif.

15. Plus généralement, ayant

$$\lim_{n=\infty}\text{sup.}\,\frac{|a_n|}{n^k} = a < 1, \tag{26}$$

nous démontrons le théorème suivant :

Si l'on a pour les s_n positifs

$$\lim_{n=\infty}\text{sup.}\,\frac{s_n}{n^{k+\frac{1}{2}}} = \infty,$$

et, pour les s_n négatifs,

$$\lim_{n=\infty}\text{sup.}\,\frac{|s_n|}{n^k} = \text{A},$$

A étant un nombre fini ou nul, *la fonction représentée par* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *devient infinie d'ordre supérieur à* k *au point* 1.

En effet, désignons de nouveau le plus grand terme de la suite finie

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n$$

par $n^{k+\frac{1}{2}}\alpha_n$, dont nous savons que

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty.$$

Dans la suite finie considérée, prenons le terme qui diffère le moins de $n^{k+\frac{1}{2}}$; évaluons le nombre des termes p qui est indispensable pour parvenir de ce terme au terme maximum. D'après (26), p est plus grand que le plus petit nombre p' satisfaisant à la condition

$$n^{k+\frac{1}{2}} + (n-p')^k + (n-p'+1)^k + \ldots + (n-1)^k + n^k \geqq n^{k+\frac{1}{2}}\alpha_n,$$

car ici nous avons construit le terme maximum à l'aide de termes qui sont les plus grands possibles.

Cette inégalité peut s'écrire encore

$$(n-p')^k + (n-p'+1)^k + \ldots + (n-1)^k + n^k \geqq n^{k+\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1) = n^k n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1);$$

donc

$$p > n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1),$$

car le second membre est le produit de deux facteurs dont le premier est le plus grand terme du premier membre.

Construisons maintenant S_n.

D'après le raisonnement donné, le nombre des $s_i (i \leqq n)$ qui sont plus grands que $n^{k+\frac{1}{2}}$ est au moins $n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$; donc ils donnent une partie de S_n d'ordre plus élevé que $k+1$. Les autres termes positifs ne peuvent pas diminuer cet ordre, de même que les S_n négatifs, leur somme, en valeur absolue, étant inférieure à $A n^{k+1}$. Nous avons donc démontré que

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{k+1}}{S_n} = 0.$$

Appliquons maintenant le théorème de Cesàro aux deux fonctions

$$\frac{1}{(1-x)^{k+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

et

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum S_n x^n.$$

En remarquant que, d'après un théorème de M. Appell [1],

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{k+1}}{h_n} = \Gamma(k+1),$$

et que, par suite,

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{S_n} = 0.$$

on obtient

$$\lim_{x=1} \frac{\dfrac{1}{(1-x)^{k+2}}}{\dfrac{f(x)}{(1-x)^2}} = \lim_{x=1} \frac{1}{(1-x)^k f(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{h_n}{S_n} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

14. Affranchissons-nous maintenant de la restriction que les coefficients soient réels. Dans ce cas plus général, le théorème s'énonce comme il suit :

Supposons que

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} |a_n| < 1.$$

Si l'on peut ranger les s_n en deux groupes de manière que tous les termes s_{n_1} du premier groupe se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine) et si pour ces termes

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} \frac{|s_{n_1}|}{n_1^{\frac{1}{2}}} = \infty,$$

et si, pour les autres termes,

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} |s_n| = a,$$

---

[1] APPELL, *Sur certaines séries*, etc. (*Comptes rendus*, t. LXXXVII).

où a est un nombre fini ou nul, *la fonction représentée par* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *devient infinie au point* 1.

Considérons, en effet, la fonction

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1} + \sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2}.$$

Pour que $|s_{n_1}|$ s'accroisse de la valeur $n^{\frac{1}{2}}$ jusqu'à $n^{\frac{1}{2}}\alpha_n$, il faut ajouter au moins un nombre $n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$ de coefficients, car la valeur absolue des coefficients est inférieure à l'unité. Nous aurons donc des $|s_{n_1}|$ situés entre les valeurs $n^{\frac{1}{2}}$ et $n^{\frac{1}{2}}\alpha_n$ au moins en nombre $n^{\frac{1}{2}}(\alpha_n - 1)$; par suite, comme auparavant, on peut conclure que la fonction

$$\sum_{n_1} |s_{n_1}| x^{n_1},$$

de même que son S_n a un ordre d'infinitude supérieur à 1 au point 1. C'est-à-dire

$$\lim_{x=1} (1-x) \sum_{n_1} |s_{n_1}| x^{n_1} = \infty.$$

Mais, d'après (12), pour x positif, inférieur à 1 et assez proche de 1,

$$\left| \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1} \right| > A \sum_{n_1} |s_{n_1}| x^{n_1};$$

donc

$$\lim_{x=1} (1-x) \left| \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1} \right| = \infty.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse faite sur les s_{n_2}, pour x positif et inférieur à 1,

$$\left|\sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2}\right| < \frac{B}{1-x},$$

où B est le plus grand des modules de s_{n_2}.

Par conséquent,

$$(1-x)\left|\sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2}\right| < B.$$

En combinant les deux résultats, on obtient

$$\lim_{x=1} |f(x)| = \lim_{x=1}\left|(1-x)\sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1} + (1-x)\sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2}\right| = \infty$$

ce qu'il fallait démontrer.

Enfin, dans le cas où

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} \frac{|a_n|}{n^k} = \infty,$$

le même raisonnement, avec une légère modification, nous donne le théorème suivant :

Si l'on peut former des s_n deux groupes, de manière que tous les termes s_{n_1} du premier groupe se trouvent dans un angle $\alpha < \pi$ du plan complexe (sommet à l'origine) et si pour ces termes

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} \frac{|s_{n_1}|}{n_1^{k+\frac{1}{2}}} = \infty.$$

et si, pour les autres termes s_{n_2},

$$\lim_{n=\infty} \text{sup.} \frac{s_{n_2}}{n^k} = a,$$

a étant un nombre fini ou nul, *la fonction représentée par* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *devient infinie d'ordre supérieur à k au point* 1.

CHAPITRE II.

SUR LES POINTS SINGULIERS D'ORDRE NÉGATIF.

§ V. — Résumé des résultats relatifs aux points réguliers du cercle de convergence.

15. Nous allons aborder maintenant l'étude systématique des singularités. Dans cette étude, on a suivi en général deux méthodes assez distinctes [1]. L'une ne suppose aucune restriction aux coefficients de la série de Taylor donnée, et, par cela même, les résultats obtenus par cette méthode acquièrent une très grande importance. Mais, comme le remarque M. Hadamard [2], « il est à craindre que ces résultats resteront toujours trop peu nombreux ».

L'autre méthode consiste à faire des hypothèses, parfois très particulières, sur les coefficients pour traiter des singularités relativement simples. Par exemple, les beaux résultats de M. Hadamard sur les pôles des fonctions analytiques supposent que les singularités les plus voisines de l'origine sont des pôles exclusivement, ce qui revient à faire des hypothèses toutes particulières sur certains déterminants formés de coefficients de la série.

En général, si l'on veut suivre la première méthode, on ne doit supposer aucune restriction aux singularités, car ce sont celles-ci qui déterminent les propriétés limites de la suite des coefficients.

Dans ces deux derniers Chapitres de ce Mémoire, nous essayerons de trouver une position convenable qui soit intermédiaire entre ces deux points de vue, en envisageant les singularités relativement les plus simples sans supposer rien sur les autres singularités de la même fonction, c'est-à-dire sur les coefficients de la série donnée.

Pour y parvenir, nous avons besoin de résultats relatifs aux points

---

[1] *Voir* Hadamard, *Série de Taylor* (*Scientia*), p. 13.

[2] *Ibid.*, p. 13.

réguliers; donc, tout d'abord, nous allons résumer ces recherches faites pour la plus grande partie par MM. Hadamard, Borel, Mittag-Leffler et Painlevé.

Pour cela, donnons en quelques mots la définition des moyennes arithmétiques d'ordre fractionnaire.

Soit donnée une fonction analytique

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Soient

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \\ S_n^{(1)} &= s_0 + s_1 + \ldots + s_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S_n^{(r)} &= S_0^{(r-1)} + S_1^{(r-1)} + \ldots + S_n^{(r-1)}, \end{aligned}$$

et soient

$$\begin{aligned} s_n^{(1)} &= \frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n^{(r)} &= \frac{s_0^{(r-1)}+s_1^{(r-1)}+\ldots+s_n^{(r-1)}}{n} \end{aligned}$$

les moyennes arithmétiques ordinaires formées au point 1.

M. Knopp [1] a démontré que l'existence de la limite

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)}$$

entraîne celle de

$$\lim_{n=\infty} \frac{r!\,S_n^{(r)}}{n^r}$$

et que les deux limites sont égales. Tout récemment M. Schnee [2] a complété ce résultat en démontrant la réciproque.

Donc, pour généraliser cette notion, on peut partir des $S_r^{(r)}$ dont la généralisation pour r fractionnaire est immédiate, étant donné que

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(r)} x^n.$$

---

[1] KNOPP, *Grenzwerthe von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze*. 1907, p. 19.

[2] W. SCHNEE, *Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes* (*Mathematische Annalen*, t. LXVII, 1909, p. 110).

Nous posons donc, pour r positif quelconque,

$$s_n^{(r)} = \frac{\Gamma(r+1)S_n^{(r)}}{n^r},$$

où

$$S_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n-i}^{(r+1)} a_i = \frac{1}{\Gamma(r+1)} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(r+n-i+1)}{\Gamma(n-i+1)} a_i,$$

car les $B_{n-i}^{(r+1)}$ sont des coefficients binomiaux, et nous dirons que les $s_n^{(r)}$ sont les moyennes arithmétiques (ou moyennes de Cesàro) d'ordre r formées au point 1. Cette dénomination est justifiée par le fait que, pour r entier, la limite des

$$\frac{r!\,S_n^{(r)}}{n^r}$$

coïncide avec celles des moyennes arithmétiques. Si nous voulons former les moyennes arithmétiques d'ordre quelconque en un point x_0, il faut mettre $a_n x_0^n$ au lieu de a_n.

16. Cela posé, nous pouvons résumer rapidement les résultats de M. Hadamard, qui a donné, dans sa Thèse [1], deux propositions se rattachant à la représentation de la fonction dans les points réguliers de son cercle de convergence.

La première s'énonce comme il suit :

Si l'ordre de la fonction sur son cercle de convergence est inférieur à l'unité, la série elle-même converge dans tous les points réguliers de ce cercle.

La deuxième est plus générale :

Si l'ordre de la fonction sur son cercle de convergence est inférieur à ω, les moyennes arithmétiques des s_n d'ordre $\omega - 1$ donneront pour limite dans tous les points réguliers du cercle de convergence la valeur de la fonction en ce point.

Remarquons que M. Hadamard n'emploie pas l'expression : moyennes arithmétiques; mais la formule dont il se sert et qui ne dif-

(1) P. 82, 83.

fère de ces moyennes que par un facteur dont la limite pour $n = \infty$ est égale à l'unité, s'en rapproche tellement que, pour plus de conformité du langage, nous énoncerons ce théorème toujours sous cette forme.

M. Fatou (¹) a complété le premier théorème d'une manière intéressante en démontrant que la condition

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

une fois remplie, et si l'on suppose que le rayon de convergence soit égal à l'unité, la série converge dans tous les points réguliers du cercle.

Évidemment, si la série converge en un point du cercle de rayon 1, on peut toujours en conclure que

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Donc c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la série converge aux points réguliers de son cercle de convergence.

Par exemple, pour représenter la valeur de la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$$

aux points réguliers du cercle de convergence de rayon 1, il faudrait se servir, d'après le premier théorème de M. Hadamard, des moyennes arithmétiques, car l'ordre de la fonction sur le cercle entier est 1, tandis que, en réalité, la série elle-même y converge, comme le montre le théorème de M. Fatou.

On peut compléter de la même manière le second théorème de M. Hadamard, comme l'a montré M. M. Riesz (²) en démontrant que

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les moyennes arith-

(¹) Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. XXX, p. 389).

(²) Riesz, *Sur les séries trigonométriques sommables*, 1908 (en hongrois).

métiques des s_n d'ordre r aient une limite bien déterminée dans chaque point régulier du cercle de convergence. Et cette limite représente bien la valeur de la fonction en ce point.

17. Le deuxième pas, en quelque sorte définitif, de la représentation de la fonction sur le cercle de convergence, est fait par M. Borel [1], qui a démontré que dans tous les points réguliers x_0 du cercle *la limite*

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

où

$$s_n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n,$$

existe et représente la valeur de la fonction en ces points, quels que soient les coefficients a_n de la série donnée.

Cette limite s'appelle la *limite généralisée* des s_n et les

$$S(a) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!}$$

sont, pour des valeurs de a tendant vers l'infini, les sommes exponentielles des s_n.

Dans cette voie, c'est le premier théorème qui ne suppose rien sur les coefficients a_n et qui donne cependant une relation très précise entre les coefficients (par lesquels sont déterminées les sommes exponentielles) et l'allure de la fonction aux points x_0. Et, ce qui nous paraît le plus important, à l'aide de la sommation exponentielle on peut envisager l'allure de la fonction en un point sans s'occuper des singularités de la fonction en d'autres points : ce n'était pas le cas dans la sommation par les moyennes arithmétiques. Nous verrons que cette propriété de la sommation exponentielle, jointe à sa grande simplicité qu'elle doit, pour la plus grande partie, à l'emploi de la fonction exponentielle, nous permettra d'obtenir des résultats analogues au théo-

---

(1) BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*. 1901, p. 138.

rème indiqué de M. Borel, se rapportant aux singularités de la fonction envisagée.

L'autre grand avantage de la méthode exponentielle de M. Borel est qu'elle permet de franchir le cercle de convergence. En effet, comme l'a démontré M. Borel [1], *la limite généralisée des*

$$s_n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

existe en tous points intérieurs du polygone de sommabilité et représente la valeur de la fonction en ces points, quels que soient les coefficients a_n qui déterminent d'ailleurs le polygone de sommabilité.

Comme la singularité d'une fonction au point x_0 est caractérisée, en général, uniquement par les valeurs régulières de la fonction au voisinage de ce point, il est évident que cette extension du champ de représentation est indispensable pour l'étude systématique des singularités. A ce point de vue, la représentation de la fonction dans les points réguliers doit précéder toujours la recherche générale des singularités. C'est aussi pourquoi le théorème général de M. Mittag-Leffler [2] nous sera si utile dans la suite. Mais nous utiliserons ce dernier sous des formes très différentes, de sorte que nous ne pouvons pas en donner le résumé.

Remarquons seulement que, à notre connaissance, on n'a établi à l'aide de la représentation de M. Mittag-Leffler aucune relation générale qui se rapporte aux singularités situées sur la frontière de l'étoile. Nous en proposerons deux dans la suite de ce Mémoire.

§ VI. — Des points singuliers d'ordre négatif situés sur le cercle de convergence.

18. Nous avons vu que l'ordre des points réguliers situés sur le cercle de convergence est nécessairement $-\infty$. Par conséquent, les singularités qui se rapprochent le plus de ces points sont celles dont l'ordre est négatif. Nous allons voir, en effet, qu'en cheminant vers un

---

(1) Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, p. 126.

(2) Mittag-Leffler, cinq Notes dans les *Acta mathematica*, ou encore Borel, *Séries divergentes*, chap. V.

tel point à l'intérieur ou à la circonférence du cercle de convergence, la fonction tend vers une valeur bien déterminée. Nous dirons que cette valeur est la valeur de la fonction en ce point singulier. Par exemple, A est une telle valeur pour la fonction

$$A + [\log(1-x)]^{\beta}.(1-x)^{\alpha},$$

où α est un nombre positif, mais n'est pas égal à un entier; $\beta \geqq 0$ et $\log(1-x)$ représente la branche du logarithme qui s'annule pour $x=1$.

Soit donc x_0 un point singulier d'ordre négatif du cercle de convergence de la fonction donnée

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

D'après la définition de l'ordre, on peut trouver toujours un arc (a, b) contenant x_0 à son intérieur sur lequel l'ordre de la fonction $f(x)$ est négatif. Nous pouvons appliquer le théorème fondamental de M. Hadamard (*Thèse*, p. 72); si nous le citons textuellement, c'est que ce résultat servira de base pour les démonstrations de nos théorèmes se rapportant aux points singuliers d'ordre négatif.

Une fonction d'ordre ω sur un arc déterminé et en ses points extrêmes peut être remplacée par une somme de deux fonctions dont l'une est d'ordre égal à ω ou dépassant ω d'aussi peu qu'on le veut sur le cercle entier, et l'autre est holomorphe en tous les points de l'arc considéré.

On peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où l'ordre, sur le cercle entier, de la fonction représentée par $\sum b_n x^n$, diffère aussi peu que l'on veut de l'ordre de la fonction $f(x)$ sur l'arc (a, b), c'est-à-dire peut être supposé négatif. Mais, dans ce cas, la fonction $\sum b_n x_n$ est continue partout sur le cercle de convergence, en particulier sur l'arc (a, b).

D'autre part, la fonction représentée par $\sum c_n x^n$ est holomorphe sur cet arc; la fonction $f(x)$ est donc nécessairement continue sur l'arc (a, b), parce qu'elle est la somme de deux fonctions continues. On en conclut que $f(x)$ est continue par exemple dans l'aire limitée par l'arc (a, b) et par les deux rayons OA et OB, d'où résulte la proposition qui était à démontrer.

19. Il s'agit maintenant de représenter les valeurs de la fonction aux points singuliers d'ordre négatif situés sur le cercle de convergence. Pour résoudre complètement ce problème, nous allons donner trois théorèmes, correspondant aux deux théorèmes, sous leur forme plus complète, de M. Hadamard et à celui de M. Borel.

Soit donnée la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et soit son rayon de convergence égal à 1.

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

la série $\sum a_n x^n$ *est convergente en chaque point d'ordre négatif du cercle de convergence.*

Soit, en effet, x_0 un tel point singulier. D'après le théorème fondamental de M. Hadamard cité tout à l'heure, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

et il est permis de supposer que l'ordre, Ω_1, de $\sum b_n x^n$ sur le cercle entier est négatif.

D'après (4),

$$\Omega_1 - 1 = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |b_n|}{\log n},$$

c'est-à-dire, pour n assez grand,

$$\frac{\log |b_n|}{\log n} < \Omega_1 - 1 + \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif arbitraire, ce qui nous donne

$$\log|b_n| < (\Omega_1 - 1 + \varepsilon)\log n = \log n^{\Omega_1 - 1 + \varepsilon};$$

par suite

$$|b_n| < n^{\Omega_1 - 1 + \varepsilon}.$$

Mais Ω_1 est un nombre négatif bien déterminé, ε arbitraire; on peut donc choisir ε de façon que

$$\Omega_1 + \varepsilon = -\eta < 0.$$

Cela posé, on a

$$|b_n| < \frac{1}{n^{1+\eta}},$$

de sorte que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est convergente dans tous les points du cercle de convergence, en particulier au point x_0.

D'autre part, d'après le théorème de M. Hadamard, complété par M. Fatou,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

est une série convergente. En effet, par le théorème fondamental de M. Hadamard cité plus haut, nous savons que la fonction représentée par $\sum c_n x^n$ est holomorphe en tous les points de l'arc (a, b), en particulier en x_0, et

$$\lim_{n=\infty} c_n = \lim_{n=\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

On a donc finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n;$$

autrement dit, la série envisagée est la somme de deux séries convergentes; donc elle est convergente aussi.

Réciproquement, si la série est convergente en un point du cercle de rayon 1,

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Donc, *pour que la série soit convergente en chaque point singulier d'ordre négatif du cercle de convergence, il faut et il suffit que* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$.

Le théorème d'Abel nous assure enfin que c'est la valeur de la fonction au point singulier d'ordre négatif qui est représentée par la somme de la série.

20. Supposons maintenant que

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0. \tag{27}$$

Nous démontrerons le théorème suivant :

Pour que la limite des moyennes arithmétiques d'ordre r existe et représente la valeur de la fonction en chaque point d'ordre négatif du cercle de convergence, il faut et il suffit que les coefficients de la série $\sum a_n x^n$ *satisfassent à la condition* (27).

Soit, en effet, x_0 un point singulier d'ordre négatif de la fonction donnée $f(x)$. On peut toujours écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où l'ordre de la fonction représentée par $\sum b_n x^n$ peut être supposé négatif sur le cercle entier, car son ordre sur ce cercle diffère aussi peu qu'on veut de l'ordre de $f(x)$ sur un arc (a, b) contenant x_0 à son intérieur ; d'autre part, la fonction représentée par $\sum c_n x^n$ est holomorphe en tous les points de l'arc (a, b).

D'où l'on peut conclure, comme auparavant, que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est convergente en chaque point du cercle de rayon 1 ; *a fortiori*, les moyennes arithmétiques de s_n d'ordre quelconque ont une limite finie bien déterminée pour un point quelconque du cercle.

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{n=\infty} b_n = 0$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^r} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n - b_n}{n^r} = 0.$$

Appliquons maintenant le deuxième théorème complété de M. Hadamard à la fonction représentée par $\sum c_n x^n$ dont le point x_0 est un point régulier. On voit tout de suite que les moyennes arithmétiques d'ordre r formées au point x_0 ont une limite bien déterminée. Par conséquent, il en est de même des moyennes arithmétiques d'ordre r formées pour la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n.$$

Donc la limite

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)}(a_n, x_0)$$

existe. Enfin, d'après le théorème de M. Hölder, généralisé par M. Knopp (¹), en cheminant à l'intérieur du cercle de convergence vers le point x_0 sans que le chemin soit tangent au cercle,

$$\lim_{x=x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n=\infty} s_n^{(r)}(a_n, x_0)$$

si la limite du second membre existe. Donc la limite des moyennes arithmétiques d'ordre r représente bien la valeur de la fonction en ce point singulier x_0.

Enfin, on voit aisément que la condition (27) est nécessaire pour que les moyennes arithmétiques d'ordre r aient une limite en un point d'ordre négatif du cercle de convergence. Le fait étant établi pour les points réguliers, il suffit d'utiliser le théorème fondamental de M. Hadamard pour séparer la singularité au point considéré des singularités d'ordre plus élevé de la fonction.

(¹) Knopp, *loc. cit.*, p. 46.

21. Prenons maintenant le cas le plus général où les coefficients ne sont assujettis à aucune restriction. A l'aide de la sommation exponentielle de M. Borel, nous allons démontrer le théorème suivant :

La limite généralisée des s_n existe et représente la valeur de la fonction en chaque point d'ordre négatif du cercle de convergence.

La marche du raisonnement est identique à celle déjà suivie deux fois. On écrit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où la série

$$\sum_{n=0} b_n x^n$$

est convergente en chaque point du cercle de convergence. Seulement il faut montrer que les sommes exponentielles ont aussi une limite bien déterminée en tous ces points et que cette limite est égale à la somme de la série en ce point. Pour cela nous allons généraliser le théorème de Cesàro pour les fonctions entières, étant donné que nous nous servirons de cette généralisation plusieurs fois dans la suite.

Démontrons donc que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

étant deux fonctions entières et

$$b_n > 0,$$

on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mathrm{A} \tag{28}$$

si la limite du second membre existe.

Par hypothèse,

$$\frac{a_n}{b_n} = \mathrm{A} + \varepsilon_n$$

avec

$$\lim \varepsilon_n = 0,$$

d'où

$$a_n = A b_n + \varepsilon_n b_n$$

et

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = A + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}.$$

Il suffit donc de démontrer le théorème pour $A = 0$, car dans ce cas

$$\lim_{x=\infty} \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \right| \leq \lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n b_n| x_n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \lim_{n=\infty} |\varepsilon_n| = 0.$$

Supposons donc que

$$\frac{a_n}{b_n} = \varepsilon_n.$$

ε étant donné d'avance, on peut trouver un indice N tel que pour $n > N$

$$a_n < \frac{\varepsilon}{2} b_n;$$

par suite,

$$\frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} < \frac{\left| \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, nous pouvons prendre x assez grand pour que

$$\frac{\left| \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

car $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ est un polynome. Donc finalement

$$\frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} < \varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer,

22. Supposons maintenant que la limite

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty} (a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n) = \text{A}$$

existe, et regardons l'expression

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}}.$$

Nous avons ici deux fonctions entières et nous pouvons appliquer le théorème que nous venons de démontrer.

On a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\frac{s_n}{n!}}{\frac{1}{n!}} = \text{A};$$

d'où il résulte que la limite généralisée existe et représente la valeur (limite) de la fonction partout où la série est convergente; par suite, la limite généralisée des s_n formée pour la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

au point x_0 existe et représente la valeur de cette fonction en ce point singulier.

Regardons maintenant la fonction représentée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

D'après le théorème de M. Borel cité plus haut, la limite généralisée des s_n existe et représente la valeur de la fonction en chaque point régulier du cercle de convergence, en particulier au point x_0.

Enfin, on a identiquement

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n,$$

et la sommation exponentielle est une opération distributive; donc la limite généralisée des s_n formée pour la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

existe et représente la valeur (limite) de la fonction $f(x)$. Ce qu'il fallait démontrer.

§ VII. — Des points singuliers d'ordre négatif situés sur le polygone de sommabilité et à l'origine des demi-droites exclues de l'étoile de M. Mittag-Leffler.

25. Ceux des points singuliers d'ordre négatif qui ont la plus grande importance sont les points critiques algébriques et les points critiques à la fois algébriques et logarithmiques. Et ces points singuliers peuvent fort bien se présenter en dehors du cercle de convergence. Le problème se pose donc de représenter les valeurs de la fonction en ces points singuliers.

Pour être cependant plus général, nous allons étendre la notion de l'ordre d'un point singulier aux points singuliers situés en dehors du cercle de convergence, et cela de telle façon que les points critiques algébriques, y compris les pôles, et les points critiques à la fois algébriques et logarithmiques aient un ordre qui soit indépendant de leur position.

Prenons un point singulier x_0, l'origine d'une demi-droite exclue. Nous dirons que ω est l'ordre de la fonction en ce point s'il y a une fonction $\varphi(x)$ qui soit holomorphe dans le cercle de rayon $|x_0|$ et dont l'ordre sur ce cercle soit $\omega + \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut et, de plus, la différence

$$f(x) - \varphi(x) = f_1(x)$$

étant holomorphe en x_0.

Par exemple, l'ordre de la fonction

$$(x - x_0)^\alpha [\log(x - x_0)]^\beta + f_1(x)$$

en x_0 est $-\alpha$, quel que soit le rayon de convergence du développement taylorien de la fonction $f_1(x)$ sous la seule condition que $f_1(x)$ soit holomorphe sur la ligne droite qui joint x_0 au centre du développement taylorien de $f_1(x)$.

Prenons le centre de l'étoile pour l'origine des coordonnées. On voit aisément qu'en cheminant vers un point singulier d'ordre négatif, le long du rayon Ox_0 ou, plus généralement, sur une bande assez étroite parallèle à ce rayon et limitée par l'arc de la circonférence de rayon $|x_0|$, ou sur cette circonférence même, la fonction tend vers une valeur bien déterminée que nous nommerons *la valeur de la fonction en ce point singulier*.

24. Il s'agit maintenant de chercher des développements qui représentent ces valeurs de la fonction donnée $f(x)$.

Tout d'abord la sommation exponentielle de M. Borel nous donne la proposition suivante, relative aux points singuliers d'ordre négatif situés sur le polygone de sommabilité :

La limite généralisée des s_n existe et représente la valeur de la fonction en chaque point singulier d'ordre négatif du polygone de sommabilité (sommets exclus).

En effet, le raisonnement dont nous nous sommes servis précédemment pour les points singuliers d'ordre négatif situés sur le cercle de convergence s'applique presque sans modification dans le cas présent.

Soit, en effet, x_0 un tel point singulier de $f(x)$ situé sur le polygone de sommabilité. D'après la définition du point singulier d'ordre négatif, on peut écrire

$$f(x) = \varphi(x) + f_1(x),$$

où le rayon de convergence de $\varphi(x)$ est $|x_0|$; donc le point x_0 est sur le cercle de convergence de $\varphi(x)$, et l'ordre de $\varphi(x)$ sur ce cercle entier peut être supposé négatif. D'où il résulte que la série qui représente $\varphi(x)$ converge en les tous points de ce cercle, en particulier au point x_0, et, d'après le théorème de Césàro généralisé aux fonctions entières, la limite généralisée des s_n formée en x_0 existe et représente la valeur limite de $\varphi(x)$.

D'autre part, si le point x_0 ne coïncide pas avec un des sommets du polygone, le polygone de sommabilité de $f_1(x)$ comprendra x_0 à son intérieur. Par suite, d'après le théorème de M. Borel, la limite généralisée des s_n formée en x_0 par rapport à la fonction $f_1(x)$ existe et représente la valeur $f_1(x_0)$.

Mais la sommation exponentielle est une opération distributive; donc la somme exponentielle de $f(x)$ est la somme des sommes exponentielles de $\varphi(x)$ et de $f_1(x)$. D'où l'on conclut que la limite généralisée de $f(x)$ formée en x_0 existe et représente la valeur de la fonction $f(x)$ en ce point singulier.

25. Passons maintenant aux points singuliers d'ordre négatif situés sur l'étoile principale de M. Mittag-Leffler. Pour représenter les valeurs de la fonction en ces points, nous nous servirons du développement suivant donné par M. Lindelöf [1].

Soit donnée une fonction analytique quelconque par son développement taylorien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

et formons les fonctions entières

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{n^{\frac{1}{a}}}\right)^n,$$

---

[1] E. Lindelöf, *Calcul des résidus*, 1905, p. 123.

où $a > 0$. M. Lindelöf démontre qu'en tous les points situés à l'intérieur de l'étoile

$$\lim_{a=\infty} F_a(x) = f(x),$$

et que les fonctions entières $F_a(x)$ convergent uniformément vers la fonction $f(x)$ dans une aire quelconque intérieure à l'étoile. C'est le théorème déjà classique de M. Mittag-Leffler sur la représentation des fonctions analytiques sous une forme très simple.

Soit maintenant x_0 un point singulier d'ordre négatif, situé à l'origine d'une demi-droite exclue. D'après la définition de ces points singuliers,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où $f_1(x)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$ et où l'étoile de $f_2(x)$ contient à son intérieur le point x_0. Donc

$$(29)\qquad \lim_{a=\infty} F_a^{(2)}(x_0) = c_0 + \lim_{a=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{x_0}{n^{\frac{1}{a}}}\right)^n = f_2(x_0).$$

Démontrons que de même

$$\lim_{a=\infty} F_a^{(1)}(x_0) = b_0 + \lim_{a=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{x_0}{n^{\frac{1}{a}}}\right)^n = f_1(x_0),$$

en désignant par $f_1(x_0)$ la valeur de la fonction $f_1(x)$ au point singulier x_0.

Nous savons que $f_1(x)$ est d'ordre négatif sur le cercle de rayon $|x_0|$ que nous pouvons supposer l'unité pour le moment. Par suite

$$|b_n| < \frac{1}{n^{1+\epsilon}},$$

c'est-à-dire la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$$

est convergente, et pour un ε donné arbitrairement on peut trouver un indice k tel que

$$|b_k| + |b_{k+1}| + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais

$$n^{\frac{n}{a}} > 1,$$

de sorte que

$$(30)\qquad \left|\frac{b_k}{k^{\frac{k}{a}}}\right| + \left|\frac{b_{k+1}}{(k+1)^{\frac{k+1}{a}}}\right| + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Formons maintenant la différence

$$f_1(x_0) - \mathrm{F}_a^{(1)}(x_0).$$

La valeur $f_1(x_0)$ est représentée par la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n,$$

et, d'après (30), la série

$$\mathrm{F}_a^{(1)}(x_0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{x_0}{n^{\frac{1}{a}}}\right)^n$$

est convergente aussi. Donc

$$f_1(x_0) - \mathrm{F}_a^{(1)}(x_0) = b_2 x_0^2\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{a}}}\right) + b_3 x_0^3\left(1 - \frac{1}{3^{\frac{3}{a}}}\right) + \ldots + b_k x_0^k\left(1 - \frac{1}{k^{\frac{k}{a}}}\right) + \ldots.$$

Mais, le module de x_0 étant égal à 1, on a, d'après (30),

$$\left| b_k x_0^k \left(1 - \frac{1}{k^{\frac{k}{a}}}\right) + \ldots \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour a quelconque.

D'autre part, k étant fixé,

$$\lim_{a=\infty}\left(1 - \frac{1}{k^{\frac{k}{a}}}\right) = 0,$$

de sorte qu'à partir d'une valeur de a

$$1 - \frac{1}{k^{\frac{k}{a}}} < \frac{\varepsilon}{2k};$$

donc on a finalement pour a assez grand

$$|f_1(x_0) - F_a^{(1)}(x_0)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{a=\infty} F_a^{(1)}(x_0) = f_1(x_0);$$

enfin on a

$$F_a(x_0) = F_a^{(1)}(x_0) + F_a^{(2)}(x_0);$$

d'où il résulte que

$$\lim_{a=\infty} F_a(x_0) = f_2(x_0) + f_1(x_0) = f(x_0),$$

en désignant par $f(x_0)$ la valeur que prend la fonction $f(x)$ en cheminant vers x_0. Donc :

Les valeurs des fonctions entières $F_a(x)$, *prises en un point singulier d'ordre négatif de l'étoile, tendent vers la valeur en ce point de la fonction* $f(x)$ *représentée par ces fonctions entières.*

Par ce résultat, le problème de la représentation de la fonction en ces points singuliers est complètement résolu. Mais remarquons encore que cette représentation peut être effectuée par beaucoup d'autres développements. Par exemple, les autres représentations des fonctions analytiques par des fonctions entières appropriées données par M. Lindelöf [1] la permettent aussi. Ou bien tout un genre de développements des fonctions analytiques donné par M. Mittag-Leffler [2] rend possible encore cette représentation.

---

(1) Lindelöf, *Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique* (*Comptes rendus*, t. CXXXV, 1902).

(2) Nous nous en occuperons tout spécialement à la fin du troisième Chapitre.

CHAPITRE III.

SUR LES PÔLES ET LES POINTS CRITIQUES ALGÉBRIQUES.

§ VIII. — Étude des pôles sur le cercle de convergence à l'aide des moyennes arithmétiques.

26. Après l'étude des points singuliers d'ordre négatif, passons maintenant à l'étude des points singuliers d'ordre positif. Parmi ces points singuliers, les plus simples et en même temps les plus importants sont les pôles et les points critiques algébriques. Pour commencer, nous les étudierons sur le cercle de convergence, et ensuite nous envisagerons les pôles et les points critiques situés en dehors de ce cercle.

M. Darboux et après lui M. Hadamard (¹) ont établi des relations très importantes entre ces singularités situées sur le cercle de convergence et la croissance des modules des coefficients. Nous citerons le théorème de M. Hadamard comme le plus général.

Soit donnée la fonction

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que le rayon de convergence de la série de Taylor soit l'unité. Et soit x_0 un pôle d'ordre k de $f(x)$, c'est-à-dire soit

$$f(x)=\frac{B_k}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^k}+\ldots+\frac{B_1}{1-\dfrac{x}{x_0}}+f_1(x),$$

où $f_1(x)$ est holomorphe en x_0.

Le théorème de M. Hadamard dans notre terminologie s'énonce comme il suit :

(¹) *Thèse*, p. 83.

Si l'ordre de la fonction $f(x)$ sur le cercle de convergence est ω,

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(\omega-k-1+\varepsilon)}}{n^k} = \frac{\Gamma(\omega-k+\varepsilon)}{\Gamma(\omega+\varepsilon)} B_k \qquad (\varepsilon > 0),$$

c'est-à-dire les moyennes arithmétiques d'ordre $\omega - k - 1 + \varepsilon$ permettent déjà de calculer le coefficient B_k. En retranchant de la fonction $f(x)$ le terme

$$\frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k},$$

on obtient une fonction dont l'ordre sur le cercle de convergence sera au plus ω; donc le même théorème, c'est-à-dire les moyennes arithmétiques d'ordre $\omega - k - 1 + \varepsilon$, $\omega + \varepsilon - k$, ..., $\omega + \varepsilon - 2$, permettent de calculer successivement tous les coefficients de la partie principale et de caractériser ainsi complètement la singularité en question.

27. On peut compléter ce théorème de la même manière que M. Fatou a complété le théorème de M. Hadamard relatif aux points réguliers du cercle de convergence cité dans le deuxième Chapitre.

Nous allons démontrer en effet que *la condition*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0 \tag{31}$$

est nécessaire et suffisante pour que

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r-k)}}{n^k} = \frac{\Gamma(r-k+1)}{\Gamma(r+1)} B_k. \tag{32}$$

Et la condition (31) peut être remplie par une fonction dont l'ordre sur le cercle de convergence est $r+1$, par exemple pour la fonction représentée par

$$\sum \frac{n^r}{\log n} x^n.$$

Donc, dans ce cas, d'après le théorème de M. Hadamard, pour calculer B_k, il faut prendre les moyennes arithmétiques d'ordre $r - k + \varepsilon$, tandis qu'en vérité les moyennes arithmétiques d'ordre $r - k$ suffisent déjà pour atteindre le même but. On voit donc qu'il fallait compléter l'énoncé du théorème pour arriver à une condition à la fois nécessaire et suffisante.

Au point de vue théorique, cela nous montre clairement que les singularités d'ordre plus élevé se font sentir plus tôt, c'est-à-dire dans des moyennes arithmétiques d'ordre inférieur, que les singularités dont l'ordre est moins élevé ou même que les points réguliers où la détermination de l'allure de la fonction exige l'emploi des moyennes arithmétiques d'ordre r. Cela s'explique par le fait que les moyennes arithmétiques sont déterminées par les coefficients et les coefficients par les singularités et que les singularités d'ordre supérieur ont une plus grande influence sur la formation des coefficients.

Démontrons d'abord l'égalité (32) en supposant que les coefficients satisfassent à la condition (31). On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $x_0 = 1$. Alors nous pouvons écrire

$$f(x) = \mathrm{B}_k \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n^{(k)} x^n + \mathrm{B}_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n^{(k-1)} x^n + \ldots + \mathrm{B}_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

où les $\mathrm{B}_n^{(i)}$ sont les coefficients binomiaux.

Occupons-nous tout d'abord de la fonction représentée par $\sum b_n x^n$. Évidemment

$$b_n = a_n - [\mathrm{B}_k \mathrm{B}_n^{(k)} + \ldots + \mathrm{B}_1].$$

Mais on sait que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{B}_n^{(i)}}{n^{i-1}} = \frac{1}{\Gamma(i)}$$

et $r > k - 1$, car autrement la fonction ne pourrait pas avoir un pôle d'ordre k sur le cercle de convergence. Donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{b_n}{n^r} = 0,$$

et la fonction est holomorphe au point 1.

Par suite, d'après le deuxième théorème de M. Hadamard, sous sa forme complétée, se rattachant aux points réguliers du cercle de convergence, les moyennes arithmétiques d'ordre r des

$$s_n'' = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

ont une limite bien déterminée qui est égale à $f_1(1)$.

C'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} s_n''^{(r)} = \lim_{n=\infty} \Gamma(r+1)\frac{S_n''^{(r)}}{n^r} = f_1(1),$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n''^{(r)}}{n^r} = \alpha. \tag{33}$$

Mais, d'après la définition des $S_n^{(i)}$, d'une part

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{(1-x)^i} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(i-1)} x^n,$$

par suite

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{(1-x)^i}\,\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} [S_0^{(i-1)} + S_1^{(i-1)} + \ldots + S_n^{(i-1)}] x^n,$$

d'autre part

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{(1-x)^{i+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(i)} x^n,$$

d'où il résulte que

$$S_n^{(i)} = S_0^{(i-1)} + S_1^{(i-1)} + \ldots + S_n^{(i-1)}.$$

Donc (33) peut s'écrire

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_0''^{(r-1)} + S_1''^{(r-1)} + \ldots + S_n''^{(r-1)}}{n^r} = \alpha,$$

c'est-à-dire

$$S_0''^{(r-1)} + S_1''^{(r-1)} + \ldots + S_n''^{(r-1)} = (\alpha + \varepsilon_n) n^r,$$

où

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

D'où l'on tire

$$S_n''^{(r-1)} = \alpha[n^r - (n-1)^r] + n^r\left[\varepsilon_n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^r \varepsilon_{n-1}\right],$$

donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n''^{(r-1)}}{n^r} = 0,$$

car

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^r-(n-1)^r}{n^r} = 1 - \lim_{n=\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^r = 0.$$

Nous avons donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n''^{(r-1)}}{n} = 0.$$

Répétons k fois le même raisonnement et nous avons

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n''^{(r-k)}}{n^k} = 0. \tag{34}$$

Passons maintenant à la partie principale.

On voit aisément que

$$S_n'^{(r-k)} = B_k B_n^{(r+1)} + B_{k-1} B_n^r + \ldots + B_1 B_n^{(r-k+2)};$$

donc, étant données les propriétés des coefficients binomiaux,

$$\frac{S'^{(r-k)}}{n^r} = \frac{B_k}{\Gamma(r+1)}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n'^{(r-k)}}{n^k} = \lim_{n=\infty} \Gamma(r-k+1)\frac{S_n'^{\,r-k}}{n^{r-k}}\,\frac{1}{n^k} = \frac{\Gamma(r-k+1)}{\Gamma(r+1)} B_k. \tag{35}$$

Mais enfin

$$s_n^{r-k} = s_n'^{\,r-k} + s_n''^{\,r-k};$$

donc, en ajoutant (34) et (35), on obtient

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r-k)}}{n^k} = \frac{\Gamma(r-k+1)}{\Gamma(r+1)} B_k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Réciproquement, si les moyennes arithmétiques d'ordre $r-k$ permettent de calculer de cette manière le coefficient B_k de la partie principale, les coefficients a_n satisfont à la condition (31). Cela se voit immédiatement si r est un entier, car alors le raisonnement qui nous a conduit à l'équation (34) répété r fois donne justement (31). Dans le cas où r n'est pas entier, on peut se servir d'un théorème de M. Knopp [1] qui permet d'atteindre facilement l'équation (31).

On pourrait proposer de compléter de la même façon le théorème de M. Hadamard relatif aux points critiques algébriques. Il faudrait établir pour cela quelques lemmes concernant les moyennes arithmétiques d'ordre fractionnaire. Mais nous donnerons dans la suite une relation beaucoup plus générale relative à ces points singuliers à l'aide de la sommation exponentielle, de sorte que nous nous contenterons de cette généralisation faite pour les pôles.

§ IX. — Étude des pôles sur le polygone de sommabilité à l'aide de la sommation exponentielle de M. Borel.

28. Le théorème (32) démontré précédemment ne satisfait pas encore à toutes nos exigences concernant la relation entre la singularité en un point et les propriétés limites des coefficients ou celles des expressions construites à l'aide des coefficients. En effet, les coefficients ne peuvent pas être quelconques; ils sont assujettis à la condition (31) et l'on peut voir aisément que les moyennes arithmétiques d'ordre quelconque ne sont pas propres à donner de telles relations sans aucune restriction aux coefficients. En effet, comme nous l'avons remarqué déjà, d'après la loi de leur formation,

$$S_n^{i} = S_0^{i-1} + S_1^{i-1} + \ldots + S_n^{i-1}.$$

D'où il résulte que si pour un p et un r, d'ailleurs quelconques, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{p}}{n^r} = 0,$$

ce qui arrive nécessairement si l'on envisage par exemple les pôles, les points critiques algébriques ou les points critiques logarithmiques, c'est-à-dire si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{p}}{n^{r+p}} = 0,$$

---

[1] Knopp, *Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung* (*Rendiconti di Palermo*, t. XXV, 1908).

ou, ce qui revient au même,

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^p}{n^k} = 0.$$

où k est un entier plus grand que $r+p$, on en peut toujours conclure que

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{p-1}}{n^k} = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^k} = 0.$$

Donc les coefficients a_n sont assujettis à une condition toute semblable à (31).

29. La méthode qui nous a déjà permis, dans le cas des points singuliers d'ordre négatif, d'obtenir des relations entre les coefficients et les singularités sans aucune restriction aux coefficients, c'est-à-dire d'envisager la singularité de la fonction donnée en un point indépendamment des autres singularités de la même fonction, était la méthode de sommation exponentielle de M. Borel. En outre, comme nous l'avons vu, la portée de cette méthode dépasse le cercle de convergence, de sorte qu'elle permet d'envisager les singularités situées sur le polygone de sommabilité.

C'est donc cette méthode dont nous allons nous servir pour caractériser les pôles situés sur le cercle de convergence ou plus généralement sur le polygone de sommabilité dans le cas des coefficients quelconques.

Soit donc donnée la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

par une série de Taylor à rayon de convergence fini, non nul.

Soit x_0 un pôle d'ordre k de cette fonction situé sur le polygone de sommabilité (sommets exclus). On a par conséquent

$$(36)\qquad f(x) = \frac{B_k}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^k} + \frac{B_{k-1}}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{k-1}} + \ldots + \frac{B_1}{1-\frac{x}{x_0}} + f_1(x).$$

où la fonction

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est déjà holomorphe en x_0 et ce point est à l'intérieur du polygone de sommabilité de $f_1(x)$.

En effet, par hypothèse, x_0 est sur un côté du polygone de sommabilité de $f(x)$ et non sur un sommet; donc il y a deux lignes coupant ce côté et déterminant ainsi un segment qui contient le point x_0 et qui n'est plus rencontré par aucune ligne. Si l'on supprime le pôle, on supprime ce segment, car. pour construire le polygone nouveau, il faut tracer les mêmes lignes, sauf la ligne qui dérive du pôle supprimé et qui contient ce segment. Donc le segment entier, par suite aussi le point x_0, tombe à l'intérieur du polygone de sommabilité de $f_1(x)$.

Donc, d'après le théorème de M. Borel, on a

$$\lim_{a=\infty} S'(a) = \lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s'_n \frac{a^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}} = f_1(x_0), \tag{37}$$

en désignant par s'_n

$$s'_n = b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_n x_0^n.$$

50. Formons maintenant les sommes exponentielles $S_i(a)$ en x_0 relatives à la fonction

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^i}.$$

On sait que les s_n de cette fonction au point x_0 sont

$$\frac{(n+i)(n+i-1)\ldots(n+1)}{i!},$$

donc

$$S_i(a) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+i)(n+i-1)\ldots(n+1)\frac{a^n}{n!}}{\displaystyle i!\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}}.$$

Mais on voit aisément que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+i)(n+i-1)\dots(n+1)\frac{a^n}{n!}=\frac{d^i}{da^i}(a^i e^a),$$

de sorte que

$$S_i(a)=\frac{\dfrac{d^i}{da^i}(a^i e^a)}{i!\,e^a}.$$

Dans l'expression

$$\frac{d^i}{da^i}(a^i e^a),$$

il y a un nombre fini de termes qui, tous, contiennent e^a comme facteur, et le multiplicateur de e^a est un polynome de degré i en a, où le terme de degré i est a^i.

D'où il résulte

$$\lim_{a=\infty}\frac{S_i(a)}{a^i}=\frac{1}{i!}. \tag{38}$$

Formons maintenant la somme exponentielle de $f(x)$. D'après (36), si l'on désigne cette somme par $S(a)$,

$$S(a)=B_k S_k(a)+B_{k-1}S_{k-1}(a)+\dots+B_1 S_1(a)+S'(a).$$

D'après (38), pour $i<k$,

$$\lim_{a=\infty}\frac{S_i(a)}{a^k}=0,$$

et, pour $i=k$,

$$\lim_{a=\infty}\frac{S_k(a)}{a^k}=\frac{1}{k!}.$$

D'autre part, d'après (37),

$$\lim_{a=\infty}\frac{S'(a)}{a^k}=0.$$

D'où l'on conclut que

$$\lim_{a=\infty}\frac{S(a)}{a^k}=\frac{B_k}{k!}, \tag{39}$$

C'est la relation cherchée. On voit donc que *la somme exponen-*

tielle permet de calculer, dans le cas où les coefficients sont quelconques, les coefficients de la partie principale.

En effet, après avoir calculé B_k par la formule (39), on retranche de $f(x)$ la quantité

$$\frac{B_k}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^k},$$

et l'on applique de nouveau le théorème aux pôles d'ordre $k-1$, et ainsi de suite.

Remarquons encore que le raisonnement subsiste entièrement si la fonction $f_1(x)$ n'est pas holomorphe en x_0, mais y est d'ordre négatif.

En effet, nous avons démontré qu'en un tel point situé sur le polygone de sommabilité la limite généralisée existe (p. 65), c'est-à-dire qu'on a toujours

$$\lim_{a=\infty} S'(a) = f_1(x_0),$$

par suite

$$\lim_{a=\infty} \frac{S'(a)}{n^k} = 0,$$

et c'est cette équation dont nous nous sommes servis pour démontrer la relation (39).

Cette remarque nous sera utile dans l'étude des points critiques algébriques situés sur le polygone de sommabilité.

§ X. — Étude des pôles à l'aide des sommations exponentielles généralisées de M. Hanni et de celles de M. Borel.

51. La relation trouvée entre les pôles et la somme exponentielle est absolument générale en ce qui concerne les coefficients de la série de Taylor donnée d'avance. Mais elle ne s'applique pas aux pôles situés en dehors du polygone de sommabilité, et cela est bien naturel, étant donné que la somme exponentielle formée en un point à l'extérieur du polygone n'a pas de limite, même si le point envisagé est un point régulier de la fonction. En particulier, la somme exponentielle peut devenir infinie sans qu'on en puisse conclure qu'il en est de même pour la fonction $f(x)$.

Il est donc indispensable, pour pousser plus loin nos recherches, de recourir aux développements de la fonction donnée $f(x)$ qui représentent cette fonction dans un domaine plus étendu que le polygone de sommabilité ou, en d'autres termes, dont le domaine de sommabilité dépasse celui de la sommation exponentielle.

Mais il y a une remarque à faire.

Les développements dont les domaines de sommabilité sont de plus en plus larges deviennent en même temps de plus en plus compliqués.

En effet, si je me donne au hasard un développement quelconque de M. Mittag-Leffler qui représente la fonction $f(x)$ par une suite de polynomes, il est presque impossible de calculer par exemple les valeurs de ces polynomes en un pôle pour déterminer le degré d'infinitude du développement en ce point. Ou bien, ce qui est beaucoup plus important encore au point de vue théorique, je peux supprimer ou intercaler une infinité de polynomes de la suite et modifier ainsi arbitrairement le degré d'infinitude du développement sans changer le caractère de la représentation.

Par suite, il ne nous semble pas inutile d'envisager aussi les développements qui, tout en ayant un domaine de sommabilité moins étendu que l'étoile, sont assez simples pour permettre d'obtenir des résultats précis et simples.

52. Telle est par exemple la généralisation qu'a donné M. Hanni (¹) de la méthode de sommation exponentielle exposée plus haut.

Posons

$$B_1(a) = S(a) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0)\frac{a^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}},$$

$$B_2(a) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_1(n)\frac{a^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(¹) Hanni, *Ueber die Beziehung zwischen der Darstellung*, etc. (*Acta mathematica*, t. XXIX, 1905).

et

$$B_r(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_{r-1}(n) \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}}.$$

M. Hanni a déterminé les domaines de sommabilité de ces développements, et il a trouvé que, dans des cas assez étendus, ces domaines dépassent le polygone de sommabilité sans atteindre, en général, l'étoile.

Soit maintenant x_0 un pôle d'ordre k, et supposons que le domaine de sommabilité de $B^{(r)}(a)$ construit pour la fonction

$$f_1(x) = f(x) - \left[\frac{B_k}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k} + \frac{B_{k-1}}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{k-1}} + \ldots + \frac{B_1}{1 - \frac{x}{x_0}} \right]$$

contienne x_0 à son intérieur, c'est-à-dire qu'on ait

$$(40) \qquad \lim_{a=\infty} B'^{(r)}(a) = f_1(x_0).$$

Déterminons maintenant l'ordre de grandeur pour $a = \infty$ de $B_k^{(r)}(a)$ construit en x_0 pour

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k}.$$

Tout d'abord, d'après (39), nous savons que

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_k^{(1)}(a)}{a^k} = \frac{1}{k!}.$$

Calculons $B_k^{(2)}(a)$. Étant donné que

$$s_n = \frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)}{k!},$$

on a

$$B_k^{(1)}(a) = \frac{e^{-a}}{k!} \frac{d^k}{da^k}(a^k e^a) = \frac{1}{k!} P_k(a),$$

où $P_k(a)$ est un polynome dont le terme de degré maximum est a^k.

Donc

$$B_k^{(2)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_k(n) \frac{a^n}{n!}}{k! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

et, d'après le théorème de Cesàro généralisé pour les fonctions entières,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum P_k(n) \frac{a^n}{n!}}{\sum (n+k)\ldots(n+1)\frac{a^n}{n!}} = 1,$$

car

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_k(n)}{(n+k)\ldots(n+1)} = 1,$$

d'où il résulte que

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_k^2(a)}{a^k} = \frac{1}{k!}.$$

Le même raisonnement s'applique pour r quelconque. D'où l'on conclut que (40) peut s'écrire

$$\lim_{a=\infty} \left\{ B^{(r)}(a) - [B_k B_k^{r}(a) + \ldots + B_1 B_1^{(r)}(a)] \right\} = f_1(x_0),$$

où $B^{(r)}(a)$ signifie la $r^{\text{ième}}$ somme exponentielle formée pour $f(x)$. En divisant par a^k, on obtient

$$(41) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{B^{(r)}(a)}{a^k} = \frac{B_k}{k!}.$$

Par conséquent, les sommes exponentielles généralisées de M. Hanni ont la même relation simple avec les pôles que la somme exponentielle même de M. Borel.

35. Passons maintenant aux sommes exponentielles généralisées par M. Borel [1]. Cette généralisation est caractérisée par le fait qu'au

---

[1] Borel, *Sur les séries divergentes*, 1901, p. 129.

lieu de e^a on emploie pour fonction sommatrice e^{a^r}; en d'autres termes, on forme les moyennes

$$S^{(r)}(a) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}(x)\frac{a^{rn}}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{rn}}{n!}},$$

et l'on envisage la limite de cette expression pour $a=\infty$, r étant un entier positif.

M. Borel démontre qu'en général le domaine de sommabilité de ces sommes exponentielles généralisées dépasse beaucoup le polygone de sommabilité. Par exemple, si la fonction $f(x)$ n'a qu'un nombre limité de points singuliers dans toute aire finie, la méthode exponentielle généralisée permet de calculer la valeur de la fonction en un point régulier aussi voisin qu'on veut d'un point quelconque du plan complexe. Il est donc bien naturel d'étendre nos résultats à cette méthode de sommation si efficace et en même temps si simple.

Soit x_0 un pôle d'ordre k, et supposons que le domaine de sommabilité de $S^r(a)$, construit pour la fonction

$$f_1(x) = f(x) - \left[\frac{B_k}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^k} + \ldots + \frac{B_1}{1-\frac{x}{x_0}}\right],$$

contienne x_0 à son intérieur; en d'autres termes, soit

$$(42) \qquad \lim_{a=\infty} S^{(r)}(a) = f_1(x_0).$$

D'autre part, on sait que les s_n de

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^k}$$

sont

$$s_n = \frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)}{k!},$$

de sorte que la somme exponentielle d'ordre r de ce terme principal est

$$S_k^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(rn+k)(rn+k-1)\ldots(rn+1)\frac{a^{rn}}{n!}}{k!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Par conséquent, comme auparavant,

$$S_k^r(a) = \frac{\frac{d^k}{da^k}(a^k e^{a^r})}{k!\, e^{a^r}}.$$

Si l'on effectue maintenant la différentiation indiquée, on obtient un nombre fini de termes qui contiennent e^{a^r} comme facteur et l'on voit aisément que le dernier est multiplié par un polynome de degré rk, de sorte que

$$S_k^r(a) = \frac{P_{rk}(a)}{k!}.$$

On détermine ensuite facilement le coefficient du terme de degré rk; ce calcul donne

$$\lim_{a=\infty}\frac{P_{rk}(a)}{a^{rk}} = r^k.$$

Donc, pour $i<k$,

$$\lim_{a=\infty}\frac{S_i^r(a)}{r^k a^{rk}} = 0.$$

et, pour $i=k$,

$$\lim_{a=\infty}\frac{S_k^r(a)}{r^k a^{rk}} = \frac{1}{k!}.$$

Désignons enfin par $S^{(r)}(a)$ la somme exponentielle d'ordre r formée pour $f(x)$. Avec cette notation, (42) nous donne

$$\lim_{a=\infty}\left\{S^{(r)}(a) - [B_k S_k^r(a) + B_{k-1}S_{k-1}^r(a) + \ldots + B_1 S_1^r(a)]\right\} = f_1(x_0).$$

D'où il suit immédiatement que

$$(43)\qquad \lim_{a=\infty}\frac{S^{(r)}(a)}{r^k a^{rk}} = \frac{B_k}{k!}.$$

Par conséquent, *les sommes exponentielles généralisées de M. Borel sont en relation simple avec les pôles, et cette relation* *ressemble beaucoup à celle donnée par la méthode exponentielle qui a pour fonction sommatrice e^a.*

Remarquons qu'ici le degré d'infinitude des sommes envisagées n'est plus égal au degré du pôle. On voit dans quelle mesure l'emploi de la fonction exponentielle elle-même rend possible d'obtenir des résultats à la fois généraux et simples. Si l'on prend pour fonction sommatrice des fonctions plus compliquées que e^a malgré qu'elles s'en approchent dans leur formation, les résultats deviendront aussi de plus en plus compliqués. Cela ressortira mieux encore en nous servant du développement de M. Mittag-Leffler.

§ XI. — Étude des pôles à l'aide de la représentation des fonctions analytiques donnée par M. Mittag-Leffler.

54. Remarquons tout d'abord que, théoriquement, le théorème déjà classique de M. Mittag-Leffler sur la représentation d'une fonction analytique par une suite de polynomes ou, plus généralement, par une suite de fonctions entières, permet d'étudier les points singuliers situés sur la frontière de l'étoile principale, car il nous donne les valeurs de la fonction dans des points réguliers qui tendent vers ces points. Et, de plus, les fonctions $F_a(x)$ qui, pour $a = \infty$, s'approchent indéfiniment de la fonction analytique donnée $f(x)$, sont des polynomes ou des fonctions entières de x; par conséquent, chacune de ces fonctions a une valeur bien déterminée dans tous les points du plan complexe.

En un point x_0, situé à l'intérieur de l'étoile, nous avons, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler,

$$\lim_{a=\infty} F_a(x_0) = f(x_0).$$

Soit maintenant x_0 un point singulier situé sur la frontière de l'étoile ou, plus particulièrement, soit x_0 l'origine d'une demi-droite exclue. Un problème général se pose :

Quelles relations existent entre la suite

$$\lim_{a=\infty} F_a(x_0) \tag{44}$$

et la structure de la singularité au point x_0?

Nous avons vu dans le deuxième Chapitre que, si le point x_0 est un point singulier d'ordre négatif et si l'on prend par exemple la représentation des fonctions analytiques donnée par M. Lindelöf, la suite (44) a une limite bien déterminée, et cette limite est la valeur vers laquelle tend la fonction en cheminant vers le point singulier x_0. Ce que nous pouvons écrire

$$\lim_{a=\infty} F_a(x_0) = \lim_{x=x_0} f(x),$$

et cette relation est, en quelque sorte, l'extension à l'étoile d'un théorème d'Abel.

Supposons maintenant que x_0 soit un pôle de la fonction $f(x)$. Est-ce qu'en choisissant une représentation déterminée, la croissance de la suite (44) est en rapport avec la croissance de la fonction au voisinage du point x_0, et, de plus, est-ce qu'elle permet de déterminer les coefficients de la partie principale, c'est-à-dire de caractériser complètement la singularité?

Nous allons voir que la réponse est affirmative.

53. Pour cela, exposons brièvement la représentation d'une fonction analytique par une suite de fonctions entières donnée par M. Mittag-Leffler dans sa cinquième Note [1].

Soit

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

une fonction entière satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° $E(x)$ a pour limite 0 quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque autre que l'axe réel positif, tandis qu'elle est positive et tend vers l'infini quand x tend vers l'infini le long de l'axe réel positif.

2° ω étant positif,

(45) $$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega x)}{E(\omega)} = 0.$$

---

[1] MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (5e Note) (*Acta mathematica*, t. XXIX, 1905, p. 173).

d'une manière uniforme, tant que x appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel compris entre $x=1$ et $+\infty$.

Soit $f\mathrm{A}(x)$ la branche de $f(x)$ définie par l'équation

$$f\mathrm{A}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dans le cercle de convergence de la série et par le prolongement analytique de $\sum a_n x^n$ à l'intérieur de l'étoile.

Soit enfin

$$s_n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

D'après le théorème de M. Mittag-Leffler,

$$f\mathrm{A}(x)=\lim_{a=\infty}\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n \alpha_n a^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n}=\lim_{a=\infty} \mathrm{M}(a). \tag{46}$$

On peut considérer ce résultat comme la généralisation de la méthode exponentielle de M. Borel où l'on emploie pour fonction sommatrice, au lieu de e^a, la fonction entière $\mathrm{E}(a)$.

Pour fonction sommatrice, on peut prendre par exemple la fonction entière

$$\mathrm{E}_\beta(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a}{\log(n+\beta)}\right]^n \qquad (\beta>1). \tag{47}$$

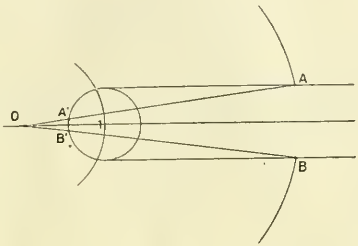
étudiée par M. Lindelöf.

56. Nous allons démontrer en effet qu'une fonction entière $\mathrm{E}(a)$ ayant tous ses coefficients positifs et tendant uniformément vers o avec $\frac{1}{a}$ dans l'angle

$$\varepsilon \le \theta \le 2\pi-\varepsilon, \tag{48}$$

quelque petit que soit ε, satisfait toujours à la deuxième condition (elle satisfait évidemment à la première).

Soit donné en effet un domaine fini A, de x, situé en dehors de la partie de l'axe réel compris entre $x = 1$ et $+\infty$. On peut toujours tracer un cercle de rayon suffisamment grand, en particulier plus grand que l'unité, pour que le domaine entier soit intérieur à ce cercle.



Entourons d'autre part le segment $1 - +\infty$ d'une bande assez étroite AA'B'B, de façon que le domaine donné soit à l'extérieur de cette bande.

Partageons A en deux parties : l'une A_1 extérieure à l'angle AOB, l'autre A_2 intérieure à A'OB'.

Par hypothèse, en choisissant ε plus petit que l'angle AOB, d'après (48),

$$\lim_{\omega=\infty} E(\omega x) = 0$$

d'une manière uniforme, quand x varie dans A_1, car avec x la quantité ωx est aussi extérieure à l'angle AOB. *A fortiori*

$$\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$$

tend uniformément vers o pour $\omega = +\infty$ dans toute aire finie extérieure à l'angle AOB, en particulier dans le domaine A_1.

Envisageons maintenant A_2, c'est-à-dire la partie de A qui est située dans l'aire limitée par OA', OB' et par l'arc du cercle A'B'.

Le plus grand module de x dans A_2 est le module de A' (ou celui de B'), de sorte que dans ce domaine

$$|x| < \overline{OA'} = b < 1.$$

D'où il résulte que

$$|E(\omega x)| < E(\omega b),$$

car les coefficients de $E(x)$ sont positifs.

Ou encore

$$\frac{|E(\omega x)|}{E(\omega)} < \frac{E(\omega b)}{E(\omega)}$$

pour un x quelconque pris dans A_2.

Appliquons maintenant le théorème de Cesàro, généralisé pour les fonctions entières, aux deux fonctions

$$E(\omega b) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n b^n \omega^n$$

et

$$E(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \omega^n.$$

On obtient

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega b)}{E(\omega)} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n b^n}{\alpha_n} = 0,$$

car $b < 1$.

D'où l'on conclut que

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{E(\omega x)}{E(\omega)} = 0,$$

d'une manière uniforme dans l'aire A'OB'.

En joignant les résultats qui concernent les aires A_1 et A_2, on voit que la fonction entière $E(a)$ remplit bien la condition (45); donc elle peut servir comme fonction sommatrice dans le théorème indiqué de M. Mittag-Leffler.

Par exemple, M. Lindelöf a démontré que la fonction entière (47) tend uniformément vers zéro dans tout angle satisfaisant à la condition (48). Par suite, d'après le raisonnement précédent, cette fonction entière peut être employée vraiment comme fonction sommatrice. Cela nous assure que les conditions exigées par le raisonnement ne sont pas contradictoires et qu'il y a bien des fonctions entières remplissant nos conditions.

57. Cela posé, supposons que x_0 soit un pôle d'ordre k, situé à l'origine d'une demi-droite exclue, de la fonction analytique définie par

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et représentée à l'intérieur de son étoile principale par

$$f(x)=\lim_{a=\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n(x)\alpha_n a^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n a^n}=\lim_{a=\infty} \mathrm{M}(a).$$

Par hypothèse, la différence

$$f_1(x)=f(x)-\left[\frac{\mathrm{B}_k}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^k}+\ldots+\frac{\mathrm{B}_1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est une fonction holomorphe en x_0 et son étoile principale contient ce point à son intérieur.

Par suite, si l'on pose

$$s'_n=b_0+b_1 x_0+\ldots+b_n x_0^n,$$

on a

$$\lim_{a=\infty}\mathrm{M}'(a)=\lim_{a=\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} s'_n\alpha_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n}=f_1(x_0). \tag{49}$$

Calculons maintenant la somme correspondante $\mathrm{M}_k(a)$ formée au point x_0 pour la fonction

$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^k}.$$

On obtient, comme auparavant,

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)\alpha_n a^n}{k!\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n a^n}=\frac{\dfrac{d^k}{da^k}[a^k\,\mathrm{E}(a)]}{k!\,\mathrm{E}(a)}.$$

Effectuons la différentiation; nous aurons des termes

$$c_i a^{k-i} E^{(k-i)}(a),$$

où i prend les valeurs o, 1, ..., k.

Le terme $i=0$ est plus grand que tous les autres. En effet,

$$E^{(k-i)}(a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+k-i)(n+k-i-1)\ldots(n+1)\alpha_{n+k-i}a^n,$$

c'est-à-dire

$$a^{k-i}E^{(k-i)}(a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+k-i)\ldots(n+1)\alpha_{n+k-i}a^{n+k-i}$$
$$=\sum_{n=i}^{\infty}(n+k)\ldots(n+i+1)\alpha_{n+k}a^{n+k}.$$

D'autre part,

$$a^k E^{(k)}(a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\ldots(n+1)\alpha_{n+k}a^{n+k},$$

de sorte que, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{a=\infty}\frac{a^{k-i}E^{(k-i)}(a)}{a^k E^{(k)}(a)}=\lim_{n=\infty}\frac{(n+k)\ldots(n+i+1)\alpha_{n+k}}{(n+k)\ldots(n+i+1)\ldots(n+1)\alpha_{n+k}}=0.$$

En remarquant encore que $c_0=1$, nous pouvons donc écrire

$$\frac{d^k}{da^k}[a^k E(a)]=a^k E^{(k)}(a)[1+\varepsilon_k(a)],$$

où

$$\lim_{a=\infty}\varepsilon_k(a)=0.$$

38. Écrivons maintenant l'équation (49) d'une manière explicite

$$\lim_{a=\infty}M'(a)=\lim_{a=\infty}[M(a)-B_k M_k(a)-\ldots-B_1 M_1(a)]=f_1(x_0),$$

et remplaçons les sommes $M_i(a)$ par leurs valeurs trouvées précédemment

$$\lim_{a=\infty}\left\{M(a)-\left[\frac{B_k a^k E^{(k)}(a)}{k!\,E(a)}+\frac{B_{k-1}a^{k-1}E^{(k-1)}(a)}{(k-1)!\,E(a)}+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{B_1 a E^{(1)}(a)}{1!\,E(a)}+\eta(a)\right]\right\}=f_1(x_0)$$

avec

$$\lim_{a=\infty} \eta(a) = 0.$$

Mais le raisonnement précédent nous donne

$$\frac{B_k a^k E^{(k)}(a)}{k!} + \frac{B_{k-1} a^{k-1} E^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} + \ldots + \frac{B_1 a E^{(1)}(a)}{1!}$$
$$= \frac{B_k a^k E^{(k)}(a)}{k!} [1 + \eta_1(a)],$$

où

$$\lim_{a=\infty} \eta_1(a) = 0,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\lim_{a=\infty} \left\{ M(a) - \frac{B_k a^k E^{(k)}(a)}{k!\, E(a)} [1 + \varepsilon(a)] \right\} = f_1(x_0), \tag{50}$$

et l'on démontre aisément que

$$\lim_{a=\infty} \frac{a^k E^{(k)}(a)}{E(a)} = +\infty. \tag{51}$$

Posons enfin

$$\frac{E^{(k)}(a)}{E(a)} = f_k(a),$$

où les fonctions $f_k(a)$ sont déterminées par la fonction sommatrice indépendamment de la fonction $f(x)$, et divisons les deux membres de l'égalité (50) par $a^k f_k(a)$.

D'après (51), le second membre tend vers zéro pour $a = \infty$. D'où l'on conclut que

$$\lim_{a=\infty} \frac{M(a)}{a^k f_k(a)} = \frac{B_k}{k!}. \tag{52}$$

Et *c'est la relation générale entre les pôles et les sommes générales de M. Mittag-Leffler*. Ces sommes $M(a)$ sont déterminées par les coefficients a_n de la série de Taylor qui définit la fonction $f(x)$; de sorte que l'équation (52) nous donne la relation générale entre les pôles situés sur l'étoile (à l'origine des demi-droites exclues) et les coefficients du développement taylorien donné d'avance.

Ou bien, $M(a)$, pour $a = \infty$, étant la valeur au point x_0 des fonctions entières $F_a(x)$ qui s'approchent indéfiniment de la fonction $f(x)$

à l'étoile, (52) peut s'écrire

$$\lim_{a=\infty} \frac{F_a(x_0)}{a^k f_k(a)} = \frac{B_k}{k!}.$$

Donc la suite

(44) $$\lim_{a=\infty} F_a(x_0),$$

formée en un pôle, est en rapport direct avec la nature de la singularité envisagée. Elle nous décèle le degré du pôle et permet de déterminer successivement les coefficients B_k de la partie principale, donc de caractériser complètement la singularité en question.

Si l'on emploie pour fonction sommatrice la fonction $E_\beta(a)$ de M. Lindelöf, on peut voir aisément que

$$\lim_{a=\infty} f_k(a) = \infty,$$

donc le degré d'infinitude de la suite (44), tout en déterminant celui de la fonction, le dépasse, car en x_0 la fonction devient infinie d'ordre k.

Remarquons enfin que, comme nous l'avons vu, c'est l'analogie complète du développement de M. Mittag-Leffler avec la somme exponentielle de M. Borel qui a rendu possible la démonstration du théorème (52).

§ XII. — De la croissance des fonctions entières.

59. Passons maintenant aux points critiques algébriques d'ordre positif, où par suite le degré d'infinitude de la fonction est un nombre positif quelconque. Dans ces recherches, nous avons besoin de quelques résultats relatifs à la croissance des fonctions entières qui représentent la fonction donnée.

Examinons tout d'abord la fonction exponentielle pour montrer l'idée fondamentale de la méthode employée.

Soit donc donné

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

M. Borel (¹) a remarqué que l'ordre de grandeur d'une fonction entière

(¹) Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 58.

à coefficients positifs ne dépend pas également de tous les termes de la série; au contraire, si l'on n'exige pas une évaluation très précise, un ou quelques-uns de ces termes, qui s'éloignent d'ailleurs à l'infini pour $a = \infty$, donnent déjà l'ordre de grandeur de la fonction.

Nous allons développer cette idée pour évaluer exactement le degré d'infinitude de certaines fonctions entières à coefficients positifs.

Soit k un nombre positif supérieur à 1, et désignons par b la partie entière de $\frac{a}{k}$, de sorte que

$$\frac{a}{k} = b + \eta,$$

où

$$0 \leqq \eta < 1.$$

Je dis que la somme des b premiers termes du développement de e^a divisés par e^a tend vers zéro pour $a = \infty$.

En effet, pour un a quelconque, les deux plus grands termes de la série envisagée sont ceux dont les indices sont $a - 1$ et a; par suite,

$$A(a) = 1 + \frac{a}{1!} + \ldots + \frac{a^b}{b!} < b\frac{a^b}{b!}.$$

Appliquons maintenant la formule de Stirling sous sa forme

$$b! = \eta(b)(b+1)^{b+\frac{1}{2}}e^{-(b+1)}, \tag{53}$$

où

$$\lim_{b=\infty} \eta(b) = \sqrt{2\pi}.$$

Nous avons

$$\frac{A(a)}{e^a} < b\frac{a^b}{\eta(b)(b+1)^{b+\frac{1}{2}}e^{-(b+1)+a}}.$$

Et

$$\frac{A(a)}{e^a} < \frac{bk^b}{\eta(b)(b+1)^{\frac{1}{2}}e^{-\left(\frac{a}{k}-\eta+1\right)+a}}; \tag{54}$$

car

$$a < k(b+1).$$

Regardons maintenant le quotient

$$\frac{k^b}{e^{a\frac{k-1}{k}}} = k^{-\eta}\frac{k^{\frac{a}{k}}}{e^{a\frac{k-1}{k}}}.$$

Pour que ce rapport tende vers zéro, il suffit que

$$\frac{k}{e^{k-1}} < 1,$$

ce qui est évident, étant donné que

$$e^{k-1} = 1 + k - 1 + \frac{(k-1)^2}{2!} + \ldots.$$

Posons

$$\frac{k^{\frac{1}{k}}}{e^{\frac{k-1}{k}}} = c,$$

dont nous savons que

$$0 < c < 1.$$

L'inégalité (54) peut donc s'écrire

$$\frac{A(a)}{e^a} < B(a)\, c^a,$$

où

$$\limsup_{a=\infty} \frac{B(a)}{a} = 0.$$

D'où l'on conclut que, r étant un nombre quelconque,

$$\lim_{a=\infty} \frac{a^r A(a)}{e^a} = 0. \tag{55}$$

40. Examinons maintenant les termes du développement e^a dont les indices sont supérieurs ou égaux à la partie entière de ak.

Je dis que la somme de ces termes divisée par e^a tend aussi vers zéro.

Désignons par b la partie entière de ak de sorte que

$$ak = b + \eta,$$

où

$$0 \leq \eta < 1.$$

Écrivons la somme envisagée sous la forme

$$B(a) = \frac{a^b}{b!}\left(1 + \frac{a}{b+1} + \frac{a}{b+1}\,\frac{a}{b+2} + \ldots\right),$$

et remarquons que

$$ka < b + 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b+1} < \frac{1}{k},$$

et *a fortiori*

$$\frac{a}{b+i} < \frac{1}{k}.$$

D'où il résulte que

$$B(a) < \frac{a^b}{b!}\,\frac{k}{k-1}.$$

Appliquons de nouveau la formule de Stirling sous la forme (53)

$$B(a) < \frac{k}{k-1}\,\frac{a^b}{\eta(b)(b+1)^{b+\frac{1}{2}}e^{-(b+1)}}$$

et

$$\frac{B(a)}{e^a} < \frac{k}{k-1}\,\frac{1}{\eta(b)(b+1)^{\frac{1}{2}}k^b\,e^{-(ak-a)+1+a}},$$

car

$$a < \frac{b+1}{k}.$$

Démontrons que

$$\lim_{a=\infty} \frac{e^{a(k-1)}}{k^{ak}} = 0;$$

pour cela, il suffit que

$$\frac{e^{k-1}}{k^k} < 1.$$

41. On peut vérifier cette inégalité de la façon suivante :

Écrivons-la sous la forme

$$e^{k-1} < k^k,$$

et prenons le logarithme des deux membres

$$k-1 < k\log k. \tag{56}$$

Il suffit, évidemment, de vérifier cette inégalité plus simple.

Au point $k=1$, les deux fonctions de k,

$$k-1 \quad \text{et} \quad k\log k,$$

prennent toutes deux la valeur zéro. Dans le point $k=e$, la fonction $k\log k$ est supérieure (de l'unité) à la fonction $k-1$. Donc, si pour $k>1$, l'inégalité (56) cessait d'être vérifiée, la dérivée de la fonction

$$k \log k - (k-1)$$

devrait avoir une racine supérieure à 1. Mais cette dérivée est justement $\log k$.

Donc on peut poser

$$\frac{e^{k-1}}{k^k} = c$$

avec

$$c < 1.$$

Par suite, nous concluons comme auparavant que, r étant un nombre quelconque,

$$\lim_{a=\infty} \frac{a^r \mathrm{B}(a)}{e^a} = 0. \tag{57}$$

Remarquons que l'on peut démontrer de la même manière que le terme maximum, et, par suite, la somme d'un nombre fini de termes divisée par e^a tend aussi vers zéro. L'ordre de grandeur de e^a n'est donc déterminé exactement que par un nombre toujours croissant de termes, et nous avons essayé de réduire le nombre des termes importants au strict minimum.

42. A l'aide de ces considérations, nous allons démontrer le théorème suivant :

Soit donnée la fonction entière

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)\, a^n}{n!},$$

où

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^p} = \alpha, \tag{58}$$

p étant un nombre réel quelconque. *L'ordre de grandeur de la fonction $f(a)$ est déterminé d'une manière très précise par l'équation*

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^p e^a} = \alpha. \tag{59}$$

En effet, d'après la condition (58),

$$\varphi(n) = \alpha n^p + \varepsilon_n n^p$$

avec

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

Par suite,

$$f(a) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^p \frac{a^n}{n!}$$

et, d'après le théorème de Cesàro,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^p \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!}} = \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Il suffit donc de déterminer l'ordre de grandeur de la fonction

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p a^n}{n!}.$$

Pour cela, nous allons étendre à cette fonction les résultats acquis tout à l'heure, relatifs à la fonction exponentielle.

Regardons, tout d'abord, la somme $A'(a)$ des b premiers termes, b étant la partie entière de $\frac{a}{k}$ et $k > 1$. Une limite supérieure de ces termes est

$$b^{|p|} \frac{a^b}{b!};$$

donc

$$A'(a) < b^{|p|} A(a);$$

par suite encore, d'après (55),

$$\lim_{a=\infty} \frac{A'(a)}{e^a} = 0. \tag{60}$$

45. Prenons ensuite la somme $B'(a)$ des termes dont les indices sont égaux ou supérieurs à ka, et soit de nouveau b la partie entière de ka.

On a

$$B'(a) = \frac{a^b}{b!}\left[b^p + (b+1)^p \frac{a}{b+1} + (b+2)^p \frac{a}{b+1}\frac{a}{b+2} + \ldots\right].$$

Soit μ un entier plus grand que $|p|$, et laissons de côté les 4μ premiers termes de $B'(a)$. Cela est permis, car nous avons démontré que la somme d'un nombre fini de termes du développement de e^a divisé par e^a tend vers zéro, comme un nombre inférieur à 1 élevé à la puissance a.

Regardons maintenant le $(4\mu+1)^{\text{ième}}$ terme de la parenthèse en remplaçant p par le nombre plus grand μ. Ce terme est

$$\frac{a^{4\mu}(b+4\mu)^\mu}{(b+1)\ldots(b+2\mu)\ldots(b+4\mu)}.$$

Étant donné que, pour $r > 2\mu$,

$$b + 2\mu + r < (b+r)^2,$$

on a

$$\frac{b+4\mu}{(b+2\mu+r)(b+2\mu+r-1)} < 1,$$

de sorte que

$$\frac{(b+4\mu)^\mu}{(b+2\mu+1)\ldots(b+4\mu)} < 1.$$

On peut donc écrire

$$B'(a) < P_{4\mu}(a) + \frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!}\left(1 + \frac{a}{b+2\mu+1} + \frac{a}{b+2\mu+1}\frac{a}{b+2\mu+2} + \ldots\right)$$

et

$$B'(a) < P_{4\mu}(a) + \frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!}\frac{k}{k-1},$$

où

$$\lim_{a=\infty} \frac{P_{4\mu}(a)}{e^a} = 0.$$

Mais

$$\frac{a^{b+4\mu}}{(b+2\mu)!} \leq \frac{a^{2\mu}a^b}{b!},$$

d'où il résulte, comme auparavant, que

$$\lim_{a=\infty} \frac{B'(a)}{e^a} = 0. \tag{61}$$

Il suffit donc, pour envisager l'ordre de grandeur de la fonction entière

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!},$$

de considérer les termes dont les indices sont supérieurs à $\frac{a}{k}$ et inférieurs à ak, k étant un nombre supérieur à l'unité.

14. On voit ainsi facilement qu'en désignant cette partie du développement par $C'(a)$ et la partie correspondante du développement de e^a par $C(a)$, on a pour $p > 0$

$$\left(\frac{a}{k}\right)^p C(a) < C'(a) < (ak)^p C(a).$$

Donc

$$\lim_{a=\infty} \text{sup.} \frac{f_1(a)}{a^p e^a} = \lim_{a=\infty} \text{sup.} \frac{A'(a) + B'(a) + C'(a)}{a^p e^a} \leq k^p$$

et

$$\lim_{a=\infty} \text{inf.} \frac{f_1(a)}{a^p e^a} = \lim_{a=\infty} \text{inf.} \frac{A'(a) + B'(a) + C'(a)}{e^a} \geq \frac{1}{k^p},$$

car

$$\lim_{a=\infty} \frac{C(a)}{e^a} = \lim_{a=\infty} \frac{e^a - A(a) - B(a)}{e^a} = 1.$$

Pour $p < 0$, la limite inférieure devient la limite supérieure et inversement.

Examinons enfin les points limites de la suite

$$\lim_{a=\infty} \frac{f_1(a)}{a^p e^a}.$$

Nous avons trouvé que tous les points limites sont entre $\frac{1}{k^p}$ et k^p. Je dis que le seul point limite est l'unité. En effet, soit x_0 un autre point limite de la suite ; je prends k assez voisin de 1 pour que

$$\left|1 - \frac{1}{k^p}\right| < |1 - x_0|$$

et

$$|k^p - 1| < |1 - x_0|,$$

ce qui est toujours possible, étant donné que k peut être aussi voisin de l'unité qu'on veut.

Mais dans ce cas x_0 n'est pas entre $\frac{1}{k^p}$ et k^p; donc x_0 ne peut pas être un point limite de la suite envisagée.

On en conclut que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!}}{a^p e^a} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

45. Avant d'appliquer ce résultat aux points critiques algébriques situés sur le cercle de convergence et sur le polygone de sommabilité, nous allons démontrer, à l'aide des considérations précédentes, un théorème plus général sur la croissance des fonctions entières.

Soit donnée la fonction entière

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}.$$

Si les deux limites d'indétermination de $\varphi(n)$ *sont* ω_0 *et* ω_1, *c'est-à-dire si l'on a, à partir d'un certain indice,*

$$n^{\omega_0 - \varepsilon} < \varphi(n) < n^{\omega_1 + \varepsilon}, \tag{62}$$

ε étant aussi petit qu'on veut, *on en peut conclure que*

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_1 + \varepsilon} e^a} = 0$$

et

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_0 - \varepsilon} e^a} = \infty.$$

En effet, la condition (62) entraîne

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\omega_1 + \varepsilon}} = 0.$$

Appliquons le théorème de Cesàro aux deux fonctions à coefficients positifs

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}$$

et

$$f_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega_1+\varepsilon} \frac{a^n}{n!}.$$

Nous avons

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{f_1(a)} = \lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\omega_1+\varepsilon}} = 0.$$

D'autre part, d'après le théorème (59),

$$\lim_{a=\infty} \frac{f_1(a)}{a^{\omega_1+\varepsilon} e^a} = 1,$$

d'où résulte la première partie du théorème énoncé.

La deuxième partie se démontre d'une manière analogue. D'après (62), qui est satisfaite pour ε quelconque,

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{\omega_0-\varepsilon}}{\varphi(n)} = 0.$$

Donc, selon le théorème de Cesàro,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega_0-\varepsilon} \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{a^n}{n!}} = 0$$

et

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^{\omega_0-\varepsilon} \frac{a^n}{n!}}{a^{\omega_0-\varepsilon} e^a} = 1,$$

d'où l'on conclut, comme précédemment, que

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^{\omega_0-\varepsilon} e^a} = \infty.$$

L'intervalle d'indétermination du $\varphi(n)$ mesure donc celui de la fonction.

En particulier, si $\omega_0 = \omega_1 = \omega$, ou, en d'autres termes, si $\varphi(n)$ est à croissance régulière, l'intervalle d'indétermination de la fonction est nul :

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^{\omega+\varepsilon} e^a} = 0$$

et

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^{\omega-\varepsilon} e^a} = \infty.$$

On peut donc dire que la croissance de $f(a)$ est régulière, et son ordre de grandeur est mesuré par

$$\omega + \text{la croissance de } e^a.$$

§ XIII. — Des points critiques algébriques situés sur le cercle de convergence et sur le polygone de sommabilité.

46. Passons maintenant à l'étude des points critiques algébriques à l'aide de la méthode de la sommation exponentielle de M. Borel.

Soit donnée la fonction analytique

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et soit x_0 un de ses points singuliers sur le cercle de convergence ou sur le polygone de sommabilité (sommets exclus) dans le voisinage duquel la fonction puisse se mettre sous la forme

$$f(x) = \frac{B_p}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^p} + f_1(x),$$

où p est un nombre positif quelconque et où l'ordre de $f_1(x)$ au point x_0 est $p_1 < p$. Ce cas est réalisé si x_0 est un point critique algébrique de la fonction $f(x)$. Supposons, pour plus de simplicité, que $x_0 = 1$.

D'après la définition de l'ordre

$$f_1(x) = f_2(x) + f_3(x),$$

où $f_2(x)$ est holomorphe dans le cercle de rayon 1, son ordre sur le cercle étant $p' = p_1 + \varepsilon < p$, et où $f_3(x)$ est holomorphe au point 1, le polygone de sommabilité de $f_3(x)$ contenant ce point à son intérieur.

Tout d'abord, la somme exponentielle $S_3(a)$ formée au point 1 pour la fonction $f_3(x)$ a une limite bien déterminée

(63) $$\lim_{a=\infty} S_3(a) = f_3(1).$$

Formons maintenant la somme exponentielle $S_2(a)$ pour la fonction

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

D'après (4)

$$p'-1 = \limsup_{n=\infty} \frac{\log|b_n|}{\log n},$$

d'où l'on conclut que

$$|b_n| < n^{p'-1+\varepsilon'}$$

et que

$$|s'_n| = |b_0 + b_1 + \ldots + b_n| < n^{p'+\varepsilon'},$$

ε' étant arbitraire. Choisissons ε' de façon que

$$p' + \varepsilon' < p;$$

nous avons

$$\lim_{n=\infty} \frac{|s'_n|}{n^p} = 0.$$

Appliquons maintenant le théorème (59) à la fonction entière

$$e^{-a} S_2(a) = \sum_{n=0}^{\infty} |s'_n| \frac{a^n}{n!}.$$

En remarquant que

$$\frac{|S_2(a)|}{a^p} \leq \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |s'_n| \frac{a^n}{n!}}{a^p e^a},$$

nous obtiendrons

(64) $$\lim_{a=\infty} \frac{S_2(a)}{a^p} = 0.$$

Occupons-nous enfin de la somme exponentielle $S_1(a)$ formée au point 1 pour la fonction

$$\frac{1}{(1-x)^p}.$$

On a

$$S_1(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(p+1)} \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}},$$

où $B_n^{(p+1)}$ sont des coefficients binomiaux, et l'on sait de ces coefficients que

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_n^{(p+1)}}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}.$$

En appliquant de nouveau le théorème (59), on obtient

$$\lim_{a=\infty} \frac{S_1(a)}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}.$$

Ajoutons encore à cette équation les équations (64) et (63), cette dernière divisée par a^p, et remarquons que

$$S(a) = B_p S_1(a) + S_2(a) + S_3(a).$$

On a ainsi le théorème

$$\lim_{a=\infty} \frac{S(a)}{a^p} = \frac{B_p}{\Gamma(p+1)}.$$

C'est la généralisation aux points critiques algébriques et aux singularités beaucoup plus compliquées encore du théorème (39) relatif aux pôles.

On voit dans quelle mesure la méthode de sommation exponentielle de M. Borel permet d'étudier les singularités, et nous insistons tout particulièrement sur la simplicité remarquable des résultats obtenus par cette méthode qui montre à la fois la souplesse et l'efficacité de cette sommation. Nous croyons confirmer par cela la remarque de M. Borel [1] relative à l'importance toujours croissante du rôle de la fonction exponentielle dans la théorie des fonctions analytiques.

47. Le résultat trouvé précédemment se généralise enfin facilement par la méthode de la sommation exponentielle généralisée de M. Borel.

---

[1] *Voir*, par exemple, BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, 1900, p. 117.

Soit, en effet, x_0 un point singulier de la fonction $f(x)$ au voisinage duquel la fonction peut s'écrire

$$f(x)=\frac{\mathrm{B}_k}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^p}+f_2(x)+f_3(x),$$

où l'ordre de

$$f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

au point x_0 est inférieur à p et où x_0 est un point régulier de la fonction $f_3(x)$ situé dans l'intérieur du domaine de sommabilité de la somme exponentielle d'ordre r.

La dernière condition peut s'écrire

$$\lim_{a=\infty} \mathrm{S}_3^{(r)}(a)=f_3(x_0).$$

D'autre part, on a

$$\mathrm{S}_2^{(r)}(a)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{(2)}\frac{a^{rn}}{n!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{rn}}{n!}}$$

avec

$$s_i^{(2)}=b_0+b_1x_0+\ldots+b_ix_0^i$$

et

$$\mathrm{S}_1^{(r)}(a)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_{rn}^{(p+1)}\frac{a^{rn}}{n!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Remplaçons dans ces formules a^r par b. On obtient

$$\mathrm{S}_2^{(r)}(a)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{(2)}\frac{b^{n}}{n!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n}}{n!}}$$

et

$$S_1^{(r)}(a) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_{rn}^{(p+1)} \frac{b^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}}.$$

On démontre, comme précédemment, que

$$\lim_{m=\infty} \frac{s_m^{(2)}}{m^p} = \lim_{n=\infty} \frac{s_{nr}^{(2)}}{n^p} = 0,$$

ce qui donne immédiatement

$$\lim_{a=\infty} \frac{S_2^{(r)}(a)}{a^{rp}} = \lim_{b=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{(2)} \frac{b^n}{n!}}{b^p e^b} = 0.$$

Enfin, étant donné que les $B_n^{(p+1)}$ sont des coefficients binomiaux,

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_n^{(p+1)}}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

ou encore

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_{nr}^{(p+1)}}{n^p} = \frac{r^p}{\Gamma(p+1)},$$

on a

$$\lim_{a=\infty} \frac{S_1^{(r)}(a)}{a^{rp}} = \lim_{b=\infty} \frac{\sum_{n=0} B_{rn}^{(p+1)} \frac{b^n}{n!}}{b^p e^b} = \frac{r^p}{\Gamma(p+1)}.$$

Si l'on remarque encore que

$$S^{(r)}(a) = B_p S_1^{(r)}(a) + S_2^{(r)}(a) + S_3^{(r)}(a),$$

on obtient le théorème suivant :

$$\lim_{a=\infty} \frac{S^{(r)}(a)}{r^p a^{rp}} = \frac{B_p}{\Gamma(p+1)}.$$

Les sommes exponentielles généralisées de M. Borel sont donc en relation simple avec les singularités. Elles permettent d'étudier la croissance de la fonction dans des points singuliers d'un genre très étendu. La seule restriction est celle qui concerne la position du point singulier. Mais, pour montrer dans quelle mesure les restrictions de cette nature sont inévitables, il convient de remarquer que même le développement de M. Mittag-Leffler ne permet pas l'étude des points singuliers situés sur la continuation (et non pas à l'origine) d'une ligne de l'étoile.

Note. — Les méthodes dont nous nous sommes servi dans le troisième Chapitre de ce Mémoire ont été appliquées, avec les modifications nécessaires, par Mme Valérie Dienes, aux points critiques algébrico-logarithmiques (*voir* sa Note *Sur les points critiques logarithmiques* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 26 avril 1909). Sans insister sur les théorèmes énoncés par elle dans cette Note, nous allons indiquer un de ses résultats relatif à la croissance des fonctions entières qu'elle utilise dans la démonstration de ses théorèmes généraux.

Soit donnée la fonction entière

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{\alpha^n}{n!}.$$

Si

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^p [\log n]^q} = \alpha,$$

où p et q sont des nombres réels quelconques, on a

$$\lim_{a=\infty} \frac{f(a)}{a^p [\log a]^q e^a} = \alpha.$$

On peut remplacer $\log n$ par des fonctions beaucoup plus générales sans que le théorème cesse d'être vrai. On voit jusqu'à quel degré de précision l'ordre de grandeur des coefficients peut déterminer celui de la fonction.

QA
1
J684
sér.6
t.5

Journal de mathématiques
pures et appliquées

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY